#A54 INTEGERS 18 (2018)

LES ENDOMORPHISMES DE $\mathbb{Q}_+^*$ POUR L'ADDITION DES CANCRES

Bruno Langlois
Lycée Blaise Pascal, Orsay, France
bruno.langlois@ac-versailles.fr

Received: 7/13/16, Revised: 1/1/18, Accepted: 6/1/18, Published: 6/5/18

Abstract

In this paper, we consider the *mediant addition* on $\mathbb{Q}_+^*$ (denoted $\oplus$), also called *child's addition*. We establish that the endomorphisms of $(\mathbb{Q}_+^*, \oplus)$ are the constant maps and the maps in the form $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, where a, b, c, d are non-negative integers such that $|ad - bc| = 1$.

Résumé

L'objectif de cet article est de caractériser les endomorphismes de $(\mathbb{Q}_+^*, \oplus)$, où $\oplus$ désigne l'addition des cancres. Exceptées les applications constantes, il s'agit des applications de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des entiers naturels vérifiant $|ad - bc| = 1$.

1. Introduction

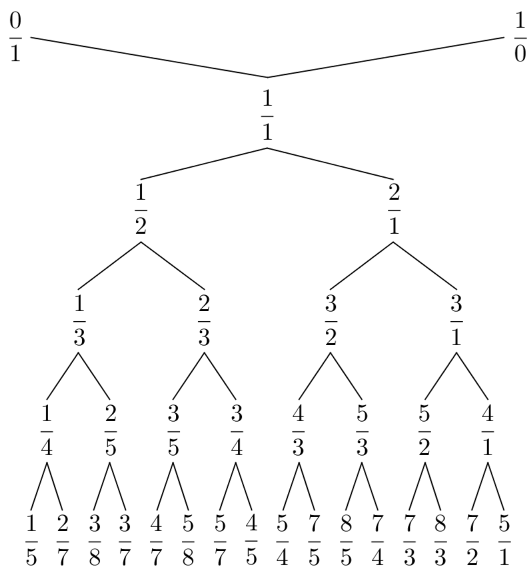
Nous nous placerons sur l'ensemble $E = \mathbb{Q}_+^*$ des rationnels strictement positifs. Si $x = \frac{p}{q}$ et $x' = \frac{p'}{q'}$ sont deux éléments de E écrits sous forme irréductible, la *somme des cancres* de x et de x' est définie par $x \oplus x' = \frac{p+p'}{q+q'}$. Par exemple, $\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{4} = \frac{1+3}{2+4} = \frac{2}{3}$, ou $5 \oplus \frac{7}{2} = \frac{5+7}{1+2} = 4$.

Notons que la loi $\oplus$ est commutative mais pas associative.

On peut étendre l'addition des cancres à $\overline{\mathbb{Q}_+} = E \cup \{0, \infty\}$ en posant $\infty = \frac{1}{0}$, ce qui permet de définir les suites de Brocot:

$B_0 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$; $B_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$; $B_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}\right)$; $B_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}\right)$; etc.

où B_{k+1} ($k \in \mathbb{N}$) s'obtient en insérant entre deux termes consécutifs de B_k leur somme des cancres. On peut également construire l'arbre binaire de Stern-Brocot, dont l'étage n°k ($k \in \mathbb{N}^*$) est constitué par les termes de B_k qui ne sont pas des termes de B_{k-1}:



Un résultat remarquable est que tout rationnel strictement positif apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot (voir [1] ou [2]).

En fait, cela se généralise (voir partie 2, propriété 4): j'établirai que si x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) sont deux éléments de E, alors les suites de Brocot généralisées:

$B'_0 = (x_1, x_2)$;
$B'_1 = (x_1, x_3, x_2)$, avec $x_3 = x_1 \oplus x_2$;
$B'_2 = (x_1, x_4, x_3, x_5, x_2)$, avec $x_4 = x_1 \oplus x_3$ et $x_5 = x_3 \oplus x_2$;
etc.

conduisent à un arbre de Stern-Brocot généralisé (construit en partant de x_1 et x_2 au lieu de 0 et ∞) dans lequel tout rationnel entre x_1 et x_2 apparaît.

Dans la partie 3, je m'appuierai en particulier sur ce résultat pour démontrer le théorème principal de cet article (on verra que la réciproque est également vraie et facile à vérifier):

Théorème 1. *Soit une application $f : E \to E$ telle que, pour tous x et x' dans E, $f(x \oplus x') = f(x) \oplus f(x')$. Alors f est constante ou de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d dans $\mathbb{N}$ tels que $|ad - bc| = 1$.*

2. Résultats Préliminaires

Si $x = \frac{p}{q}$ et $x' = \frac{p'}{q'}$ sont deux éléments de E écrits sous forme irréductible, on posera $d(x, x') = p'q - pq'$. Notons que $d(x, x')$ correspond à l'opposé de ce qu'on pourrait appeler le déterminant de x et de x'.

Remarquons que $x' = x$ ssi $d(x, x') = 0$ et que $x < x'$ (resp. $x > x'$) ssi $d(x, x') \geqslant 1$ (resp. $d(x, x') \leqslant -1$).

Dans ce qui suit, tous les intervalles évoqués sont des intervalles de $\mathbb{Q}$. D'autre part, si a, b et c sont rationnels, je dirai que c *est entre* a et b lorsque c appartient à l'intervalle $[\min(a, b); \max(a, b)]$. Enfin, le plus grand commun diviseur de deux entiers n et m sera noté $n \wedge m$.

Nous utiliserons à de nombreuses reprises les résultats qui suivent:

Propriété 1. *(1)* $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{x'} = \frac{1}{x \oplus x'}$
(2) $x = x \oplus x'$ *ssi* $x' = x$
(3) si $x < x'$, *alors* $x < x \oplus x' < x'$
(4) si $y \in E$, *alors* $y = x \oplus x'$ *ssi* $d(x, y) = d(y, x')$
(5) si $x < x'$, *on a* $d(x, x \oplus x') \leqslant d(x, x')$ *avec égalité ssi* $(p + p') \wedge (q + q') = 1$

Démonstration. (1) $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{x'} = \frac{q}{p} \oplus \frac{q'}{p'} = \frac{q+q'}{p+p'} = \frac{1}{x \oplus x'}$.
(2) $x = x \oplus x' \iff \frac{p}{q} = \frac{p+p'}{q+q'} \iff pq' = qp' \iff x = x'$.
(3) Il est facile de vérifier que $(x \oplus x') - x = \frac{q'}{q+q'}(x' - x)$ et que $x' - (x \oplus x') = \frac{q}{q+q'}(x' - x)$; le résultat en découle.
(4) Soit $\frac{u}{v}$ le représentant irréductible de y. On a $d(x, y) = d(y, x') \iff qu - pv = vp' - uq' \iff u(q + q') = v(p + p') \iff y = x \oplus x'$.
(5) Notons $\delta = (p + p') \wedge (q + q')$. Le représentant irréductible de $x \oplus x'$ est $\frac{u}{v}$ avec $u = \frac{p+p'}{\delta}$ et $v = \frac{q+q'}{\delta}$. On a alors $d(x, x \oplus x') = q\frac{p+p'}{\delta} - p\frac{q+q'}{\delta} = \frac{d(x,x')}{\delta}$ et on a donc bien $d(x, x \oplus x') \leqslant d(x, x')$ et $d(x, x \oplus x') = d(x, x') \iff \delta = 1 \iff (p + p') \wedge (q + q') = 1$. $\square$

Propriété 2. *Si* $x < x' < y$ *(resp.* $y < x < x'$*), il existe* $z \in]x; x'[$ *tel que* $x' = z \oplus y$ *(resp.* $x = z \oplus y$*).*

Démonstration. Supposons que $x < x' < y$ (le second cas se traite de façon analogue); posons $y = \frac{a}{b}$ et $z = \frac{u}{v}$ (représentations irréductibles). On a $x' = z \oplus y \iff \frac{p'}{q'} = \frac{u+a}{v+b} \iff p'v - q'u = q'a - p'b$. L'équation de Bézout $p'\beta - q'\alpha = q'a - p'b$ (d'inconnues α et β dans $\mathbb{Z}$) possède pour solutions $(\alpha, \beta) = (kp' - a, kq' - b)$, $k \in \mathbb{Z}$. En prenant $k = td(x', y) = t(aq' - bp')$ avec $t > \max(a, b)$, il est facile de vérifier que α et β sont dans $\mathbb{N}^*$ et premiers entre eux. Avec $u = \alpha = tp'd(x', y) - a$ et $v = \beta = tq'd(x', y) - b$, on a alors bien $x' = z \oplus y$. Enfin, comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{u}{v} = x'$, on peut choisir $t \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in]x; x'[$. $\square$

Lemme 1. *Si* $d(x, x') > 1$*, alors il existe un entier naturel* k *et un diviseur* $\delta > 1$ *de* $d(x, x')$ *tels que* δ *divise* $(p' + kp) \wedge (q' + kq)$.

Démonstration. Nous avons deux cas.
`Premier cas:` si $p \wedge p' > 1$; posons $\delta = p \wedge p'$. On a $\delta \wedge q = 1$ donc d'après Bézout, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $u\delta + vq = 1$, d'où $u\delta q' = q' - vq'q$. Soit $t \in \mathbb{N}^*$ tel que

$t\delta > vq'$ et posons $k = t\delta - vq'$. On a $(uq'+tq)\delta = q'+kq$ donc δ divise à la fois $p'+kp$ et $q'+kq$. Notons que δ divise aussi forcément $d(x,x') = q(p'+kp) - p(q'+kq)$.

`Second cas:` si $p \wedge p' = 1$; posons $\delta = d(x,x')$. On a $\delta = p'q - pq'$ donc $\delta \wedge p$ divise $p'q$ et donc aussi p' car $p \wedge q = 1$. Comme on a supposé $p \wedge p' = 1$, on a donc $\delta \wedge p = 1$. D'après Bézout, il existe donc u et v tels que $u\delta + vp = 1$, d'où $u\delta p' = p' - vp'p$. Soit $t \in \mathbb{N}^*$ tel que $t\delta > vp'$ et posons $k = t\delta - vp'$. On a $(up'+tp)\delta = p'+kp$ donc δ divise $p'+kp$. On en déduit aussi que δ divise $q(p'+kp) - \delta = p(q'+kq)$ et donc que δ divise $q'+kq$, vu que $\delta \wedge p = 1$. □

Propriété 3. *Soit $x' > x$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $x_0 = x'$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x \oplus x_n$. Alors la suite $(d(x,x_n))_{n\geqslant 0}$ est décroissante et constante égale à 1 à partir d'un certain rang.*

Démonstration. D'après la propriété 1.3, on voit que la suite (x_n) est strictement décroissante et à termes dans $]x;x']$. D'autre part, d'après la propriété 1.5, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x,x_{n+1}) = d(x, x \oplus x_n) \leqslant d(x,x_n)$. La suite $(d(x,x_n))$ (à termes dans $\mathbb{N}^*$) est donc décroissante, par conséquent elle est constante à partir d'un certain rang N.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $d(x,x_N) > 1$. Notons $\frac{u}{v}$ le représentant irréductible de x_N; montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{N+k} = \frac{u+kp}{v+kq}$ et que $(u+kp) \wedge (v+kq) = 1$, ce qui contredira le lemme 1 précédent. La propriété est clairement vraie pour $k = 0$ et si elle vraie au rang $k \geqslant 0$, on a alors $x_{N+k+1} = \frac{p+u+kp}{q+v+kq} = \frac{u+(k+1)p}{v+(k+1)q}$ et comme $d(x, x \oplus x_{N+k}) = d(x, x_{N+k+1}) = d(x, x_{N+k})$, la propriété 1.5 prouve que $u+(k+1)p$ et $v+(k+1)q$ sont premiers entre eux. La propriété est ainsi vraie au rang $k+1$. □

Lemme 2. *Si $x < \frac{u}{v} < x'$ (u et v dans $\mathbb{N}^*$), alors $d(x,x')v \geqslant q+q'$.*

Démonstration. Comme $x < \frac{u}{v} < x'$, on a $qu - pv \geqslant 1$ et $p'v - q'u \geqslant 1$ donc $d(x,x')v = p'qv - pq'v = q(p'v - q'u) + q'(qu - pv) \geqslant q + q'$. □

Propriété 4. *Si $F \subset E$ est une partie $\oplus-$stable contenant x et x' ($x < x'$), alors tout rationnel entre x et x' appartient également à F.*

Démonstration. Soit $x < \frac{u}{v} < x'$; montrons que $r = \frac{u}{v} \in F$. Par un procédé dichotomique, on peut définir de proche en proche deux suites (x_n) et (x'_n) à valeurs dans $[x;x']$ vérifiant $x_n < r \leqslant x'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que:

(i) $x_0 = x$ et $x'_0 = x'$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $r \in [x_n; x_n \oplus x'_n]$ alors $x_{n+1} = x_n$ et $x'_{n+1} = x_n \oplus x'_n$, et sinon $x_{n+1} = x_n \oplus x'_n$ et $x'_{n+1} = x'_n$.

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$ et $x'_n \in F$ (facile à prouver par récurrence sur n en utilisant la $\oplus-$stabilité de F). On va montrer qu'il existe forcément un entier naturel n tel que $r = x'_n$, ce qui prouvera que $r \in F$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $x_n < r < x'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; notons $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p'_n}{q'_n}$ les représentants irréductibles de x_n et x'_n. Si $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x_n \oplus x'_n) = d(x_n \oplus x'_n, x'_n) \leqslant d(x_n, x'_n)$ (voir propriétés 1.4 et 1.5) donc la suite $(d(x_n, x'_n))$ (à valeurs dans $\mathbb{N}^*$) est décroissante. D'autre part, d'après le lemme 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x'_n)v \geqslant q_n + q'_n$, d'où $d(x, x')v \geqslant q_n + q'_n$, ce qui implique que les suites (q_n) et (q'_n) ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Or $x'_n - x_n = \frac{d(x_n, x'_n)}{q_n q'_n}$ donc $(x'_n - x_n)$ ne prend également qu'un nombre fini de valeurs. Cela est absurde car $(x'_n - x_n)$ est strictement décroissante vu que $[x_n; x'_n] \supsetneq [x_{n+1}; x'_{n+1}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Remarque 1. On vient également de prouver le résultat annoncé dans l'introduction: tout rationnel $\frac{u}{v} \in [x; x']$ apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot généralisé construit en partant de x et x'.

3. Démonstration du Théorème 1

Définition 1. Soit J est un intervalle de E et f une application $J \to E$. Si I est un intervalle inclus dans J, on dit que f est de type $\mathcal{M}$ sur I, lorsque pour tous x et x' dans I, on a $f(x \oplus x') = f(x) \oplus f(x')$.

Définition 2. On dit que $f : J \to E$ est de type $\mathcal{H}$ sur $I \subset J$, lorsqu'il existe des entiers relatifs a, b, c et d avec $|ad - bc| = 1$ tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Remarque 2. **(1)** Prouver le théorème 1 revient donc à établir que toute application de type $\mathcal{M}$ sur E est constante ou de type $\mathcal{H}$ sur E. La réciproque, également valide, est l'objet de la propriété 5 suivante.
(2) En utilisant la propriété 1.1, il est facile de vérifier que si f est de type $\mathcal{M}$ sur I, alors $\frac{1}{f}$ est aussi de type $\mathcal{M}$ sur I.
(3) Une fonction de type $\mathcal{H}$ sur I est forcément strictement monotone sur I. Elle est strictement croissante (resp. décroissante) sur I lorsque $ad - bc = 1$ (resp. $ad - bc = -1$).

Propriété 5. *Si f est constante ou de type $\mathcal{H}$ sur I, alors f est de type $\mathcal{M}$ sur I.*

Démonstration. Si f est constante égale à c sur I, alors pour tous x et x' dans I, on a $f(x \oplus x') = c = c \oplus c = f(x) \oplus f(x')$, ce qui prouve que f est de type $\mathcal{M}$ sur I.

Si f est de type $\mathcal{H}$ sur I, il existe a, b, c et d dans $\mathbb{Z}$ avec $|ad - bc| = 1$ tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Comme f est définie sur I et est à valeurs dans E, ni $ax + b$, ni $cx + d$ ne s'annulent sur I; ils gardent donc un signe constant sur I.

Quitte à changer (a,b,c,d) en $(-a,-b,-c,-d)$, on peut donc supposer que $ax+b$ et $cx+d$ restent strictement positifs lorsque $x \in I$.

Soit $x = \frac{p}{q}$ et $x' = \frac{p'}{q'}$ dans I; on a $f(x) = \frac{ap+bq}{cp+dq}$ et $f(x') = \frac{ap'+bq'}{cp'+dq'}$. Les entiers $ap+bq$ et $cp+dq$ sont strictement positifs et premiers entre eux. En effet, un diviseur commun à $ap+bq$ et $cp+dq$ divise $|d(ap+bq) - b(cp+dq)| = |(da-bc)p| = p$ et $|c(ap+bq) - a(cp+dq)| = |(cb-ad)q| = q$, donc divise $p \wedge q = 1$. Il en est de même des entiers $ap'+bq'$ et $cp'+dq'$. Ainsi $f(x) \oplus f(x') = \frac{ap+bq+ap'+bq'}{cp+dq+cp'+dq'} = \frac{a(p+p')+b(q+q')}{c(p+p')+d(q+q')} = f(x \oplus x')$, ce qui prouve que f est de type $\mathcal{M}$ sur I. $\square$

Lemme 3. *Soit f une application de type $\mathcal{M}$ sur I et x, x' dans I tels que $x < x'$, alors pour tout y de I entre x et x', $f(y)$ est entre $f(x)$ et $f(x')$.*

Démonstration. Soit F l'ensemble des éléments y de $[x; x']$ tel que $f(y)$ soit entre $f(x)$ et $f(x')$. Si y_1 et y_2 sont dans F, alors $y_1 \oplus y_2 \in [x; x']$ et $f(y_1 \oplus y_2) = f(y_1) \oplus f(y_2)$ car f est de type $\mathcal{M}$. Or comme $f(y_1)$ et $f(y_2)$ sont entre $f(x)$ et $f(x')$, $f(y_1) \oplus f(y_2)$ est aussi entre $f(x)$ et $f(x')$, d'où $y_1 \oplus y_2 \in F$. Ainsi F est une partie $\oplus-$stable de E contenant x et x', ce qui prouve que $[x; x'] \subset F$; le résultat en découle. $\square$

Propriété 6. *Si f est de type $\mathcal{M}$ sur I, alors f est monotone sur I.*

Démonstration. Si x_1, x_2, x_3 et x_4 sont dans I tels que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$, alors d'après le lemme 3 précédent, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant f(x_3) \leqslant f(x_4)$ ou $f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant f(x_3) \geqslant f(x_4)$. Il est alors facile d'en déduire que $f(x') - f(x)$ est toujours du même signe lorsque x et x' sont deux éléments de I tels que $x \leqslant x'$. $\square$

Propriété 7. *Si f est de type $\mathcal{M}$ sur I et non constante, alors f est strictement monotone sur I.*

Démonstration. Soit f une application non strictement monotone et de type $\mathcal{M}$ sur I, montrons que f est constante sur I. Comme f est monotone sur I (voir propriété 6) mais ne l'est pas strictement, il existe x et x' dans I tels que $x < x'$ et $f(x) = f(x')$ (notons c cette dernière valeur). Soit F l'ensemble des éléments t de I tels que $f(t) = c$. Si t et t' ($t \leqslant t'$) sont dans F, alors $t \oplus t' \in I$ et $f(t \oplus t') = f(t) \oplus f(t') = c \oplus c = c$, donc F est une partie $\oplus-$stable de E contenant x et x', ce qui prouve d'après la propriété 4 que $[x; x'] \subset F$ et donc que f est constante égale à c sur $[x; x']$. En fait f est également constante égale à c sur $I \backslash [x; x']$. En effet si $y \in I$ est tel que $y > x'$ (resp. $y < x$), alors d'après la propriété 2, il existe $z \in]x; x'[$ tel que $x' = z \oplus y$ (resp. $x = z \oplus y$), d'où $f(x') = f(z) \oplus f(y)$ (resp. $f(x) = f(z) \oplus f(y)$), soit $c = c \oplus f(y)$, ce qui établit que $f(y) = c$ (voir propriété 1.2). Ainsi f est constante sur I. $\square$

Lemme 4. *Soit f une application de type $\mathcal{M}$ sur $[x; x']$; on suppose que $d(x, x') = |d(f(x), f(x'))| = 1$. Alors f est de type $\mathcal{H}$ sur $[x; x']$.*

Démonstration. Notons $\frac{r}{s}$ et $\frac{r'}{s'}$ les représentants irréductibles respectifs de $f(x)$ et $f(x')$. Montrons qu'il existe une application $g : t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ de type $\mathcal{H}$ sur $[x; x']$ telle que $g(x) = f(x)$ et $g(x') = f(x')$. Il est facile de vérifier que pour que les deux conditions précédentes soient vraies, il suffit qu'on ait l'égalité matricielle:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r' \\ s & s' \end{pmatrix} \tag{1}$$

Or, comme $d(x, x') = 1$, le déterminant de $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ vaut -1 donc $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $-\begin{pmatrix} q' & -p' \\ -q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q' & p' \\ q & -p \end{pmatrix}$. L'égalité (1) équivaut donc à:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r' \\ s & s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q' & p' \\ q & -p \end{pmatrix}.$$

Vérifions que la fonction $g : t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ définie par l'égalité matricielle précédente est bien de type $\mathcal{H}$ sur $[x; x']$. En effet, déjà g est bien définie sur $[x; x']$ car $cp + dq = s$ et $cp' + dq' = s'$ donc $cx + d$ et $cx' + d$ sont tous les deux strictement positifs, ce qui empêche $ct + d$ de s'annuler lorsque $t \in [x; x']$. D'autre part, g est clairement à valeurs dans E car l'application g étant monotone, elle garde ses valeurs entre $f(x)$ et $f(x')$. Enfin, comme $|d(f(x), f(x'))| = 1$, $\begin{pmatrix} r & r' \\ s & s' \end{pmatrix}$ a pour déterminant $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-\varepsilon$, ce qui prouve que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $|ad - bc| = 1$.

Montrons pour terminer que $f = g$ sur $[x; x']$. Pour cela, considérons l'ensemble F des éléments t de $[x; x']$ tels que $f(t) = g(t)$. Comme f et g sont de type $\mathcal{M}$ sur $[x; x']$ (voir propriété 5), on voit que F est une partie $\oplus-$stable de E contenant x et x', ce qui établit que $F = [x; x']$ d'après la propriété 4, et donc que pour tout $t \in [x; x']$, $f(t) = g(t)$. □

Lemme 5. *Soit f une application non constante de type $\mathcal{M}$ sur $[x; x']$, avec $d(x, x') = 1$. Alors $|d(f(x), f(x) \oplus f(x'))| = 1$.*

Démonstration. L'application f n'est pas constante donc d'après la propriété 7, f est strictement monotone sur $[x; x']$.

`Premier cas:` si f est strictement croissante. On a $f(x') > f(x)$ donc $d(f(x), f(x) \oplus f(x')) \geqslant 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $d(f(x), f(x) \oplus f(x')) > 1$. Définissons la suite (x_n) par $x_0 = x'$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n \oplus x$; posons $y_n = f(x_n)$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = f(x \oplus x_n) = f(x) \oplus f(x_n)$, soit $y_{n+1} = f(x) \oplus y_n$. D'après la propriété 3, les suites $(d(x, x_n))$ et $(d(f(x), y_n))$ sont décroissantes et constantes égales à 1 à partir d'un certain rang. En fait, la suite $(d(x, x_n))$ est constante égale à 1 dès le terme initial, car $d(x, x_0) = d(x, x') = 1$.

Notons que $d(f(x), y_1) = d(f(x), f(x) \oplus f(x')) > 1$. Si k désigne le plus petit entier naturel tel que $d(f(x), y_k) = 1$, on a donc $k \geqslant 2$. Comme $x_k = x \oplus x_{k-1}$ et $x_{k-1} = x \oplus x_{k-2}$, on a $d(x_k, x_{k-1}) = d(x, x_k) = 1 = d(x, x_{k-1}) = d(x_{k-1}, x_{k-2})$. Le fait que $d(x_k, x_{k-1}) = d(x_{k-1}, x_{k-2})$ entraîne que $x_{k-1} = x_k \oplus x_{k-2}$ et donc que $f(x_{k-1}) = f(x_k) \oplus f(x_{k-2})$, soit $y_{k-1} = y_k \oplus y_{k-2}$. D'autre part, vu que $y_k = f(x) \oplus y_{k-1}$ et $y_{k-1} = f(x) \oplus y_{k-2}$, on a $d(y_k, y_{k-1}) = d(f(x), y_k) = 1$ et $d(f(x), y_{k-1}) = d(y_{k-1}, y_{k-2})$. Or, par minimalité de k, on a $d(f(x), y_{k-1}) > 1$, donc $d(y_k, y_{k-1}) \neq d(y_{k-1}, y_{k-2})$, ce qui contredit le fait que $y_{k-1} = y_k \oplus y_{k-2}$.

`Second cas:` si f est strictement décroissante. Posons $g = \frac{1}{f}$; g est strictement croissante et, d'après la remarque 2.2, g est de type $\mathcal{M}$ sur I. On est donc ramené au premier cas, qui prouve alors que $d(g(x), g(x) \oplus g(x')) = 1$. Or, grâce à la propriété 1.1, on a $d(g(x), g(x) \oplus g(x')) = d\left(\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{f(x) \oplus f(x')}\right) = -d(f(x), f(x) \oplus f(x'))$, ce qui entraîne $d(f(x), f(x) \oplus f(x')) = -1$, d'où $|d(f(x), f(x) \oplus f(x'))| = 1$. □

Remarque 3. **(1)** D'après la propriété 1.4, on a aussi $|d(f(x) \oplus f(x'), f(x'))| = 1$. **(2)** Lorsque $d(x, x') = 1$, on a bien sûr $d(x, x \oplus x') = d(x \oplus x', x') = 1$, donc en associant le lemme précédent au lemme 4, on en déduit que si f est une application non constante de type $\mathcal{M}$ sur $[x; x']$, avec $d(x, x') = 1$, alors f est de type $\mathcal{H}$ sur $[x; x \oplus x']$ et sur $[x \oplus x'; x']$.

Lemme 6. *Soient α, β, β' ,γ, δ et δ' des réels tels que $\alpha \neq 0$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. On suppose que l'égalité $\frac{\alpha m+\beta}{\gamma m+\delta} = \frac{\alpha m+\beta'}{\gamma m+\delta'}$ est vérifiée pour au moins deux valeurs différentes du réel m. Alors $(\beta, \delta) = (\beta', \delta')$.*

Démonstration. L'égalité $\frac{\alpha m+\beta}{\gamma m+\delta} = \frac{\alpha m+\beta'}{\gamma m+\delta'}$ entraîne $[\alpha(\delta' - \delta) + \gamma(\beta - \beta')]m + \beta\delta' - \beta'\delta = 0$. La fonction affine $x \mapsto [\alpha(\delta' - \delta) + \gamma(\beta - \beta')]x + \beta\delta' - \beta'\delta$ s'annule donc en deux valeurs distinctes, elle est donc nulle, ce qui entraîne $\beta\delta' = \beta'\delta$ et $\alpha(\delta' - \delta) = \gamma(\beta' - \beta)$. On obtient alors $(\beta - \beta')(\alpha\delta - \beta\gamma) = \beta(\alpha\delta - \beta\gamma) - \alpha\beta'\delta + \beta\beta'\gamma = \beta(\alpha\delta - \beta\gamma) - \alpha\beta\delta' + \beta\beta'\gamma = \beta(\alpha\delta - \beta\gamma - \alpha\delta' + \beta'\gamma) = \beta[\gamma(\beta' - \beta) - \alpha(\delta' - \delta)] = 0$, d'où $\beta = \beta'$, vu que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. L'égalité $\delta = \delta'$ s'en déduit. □

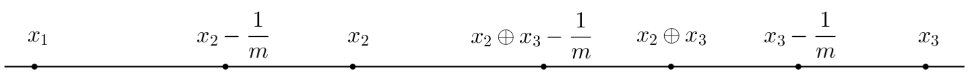
Lemme 7. *Soient x_1, x_2 et x_3 dans E tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Si f est une application de type $\mathcal{M}$ sur $[x_1; x_3]$ telle que f soit de type $\mathcal{H}$ sur $[x_1; x_2]$ et sur $[x_2; x_3]$, alors f est de type $\mathcal{H}$ sur $[x_1; x_3]$.*

Démonstration. Soit f de type $\mathcal{M}$ sur $[x_1; x_3]$ et a, b, c, d, a', b', c' et d' dans $\mathbb{Z}$ avec $|ad - bc| = |a'd' - b'c'| = 1$ tels que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, pour tout $x \in [x_1; x_2]$, et $f(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$, pour tout $x \in [x_2; x_3]$. Quitte à changer (a, b, c, d) en $(-a, -b, -c, -d)$, ou/et (a', b', c', d') en $(-a', -b', -c', -d')$, on peut supposer que pour tout $x \in [x_1; x_2]$, on a $ax+b > 0$ et $cx+d > 0$ et que pour tout $x \in [x_2; x_3]$, on a $a'x+b' > 0$ et $c'x+d' > 0$ (même raisonnement que celui fait dans la démonstration de la propriété 5).

Soient $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ et $\frac{p_3}{q_3}$ les représentants irréductibles respectifs de x_1, x_2 et x_3. Soit m un entier premier avec q_2q_3 et tel que $m > \frac{1}{x_2}$. On a alors:
$x_2 - \frac{1}{m} = \frac{p_2m-q_2}{q_2m}$ avec $p_2m - q_2 > 0$, $q_2m > 0$ et $(p_2m - q_2) \wedge q_2m = 1$; et
$x_3 - \frac{1}{m} = \frac{p_3m-q_3}{q_3m}$ avec $p_3m - q_3 > 0$, $q_3m > 0$ et $(p_3m - q_3) \wedge q_3m = 1$.
On en déduit que

$$\left(x_2 - \tfrac{1}{m}\right) \oplus \left(x_3 - \tfrac{1}{m}\right) = \tfrac{(p_2+p_3)m-(q_2+q_3)}{(q_2+q_3)m} = (x_2 \oplus x_3) - \tfrac{1}{m}\,.$$

Choisissons alors m (toujours premier avec q_2q_3) tel que $x_2 - \frac{1}{m}$, $x_3 - \frac{1}{m}$ et $(x_2 \oplus x_3) - \frac{1}{m}$ appartiennent respectivement à $]x_1; x_2[$, $]x_2; x_3[$ et $]x_2; x_3[$ (remarquons qu'il existe une infinité de telles valeurs de m).



On a alors:

$$f\left[(x_2 \oplus x_3) - \frac{1}{m}\right] = f\left(x_2 - \frac{1}{m}\right) \oplus f\left(x_3 - \frac{1}{m}\right) \tag{2}$$

c'est-à-dire:

$$\tfrac{a'[(p_2+p_3)m-(q_2+q_3)]+b'(q_2+q_3)m}{c'[(p_2+p_3)m-(q_2+q_3)]+d'(q_2+q_3)m} = \tfrac{a(p_2m-q_2)+bq_2m}{c(p_2m-q_2)+dq_2m} \oplus \tfrac{a'(p_3m-q_3)+b'q_3m}{c'(p_3m-q_3)+d'q_3m}.$$

Or, d'après ce qui a été dit plus haut, les deux fractions du membre de droite dans l'égalité précédente ont un numérateur et un dénominateur strictement positifs. D'autre part, ces deux fractions sont sous forme irréductible (rappel: lorsque $|ab - cd| = 1$ et $p \wedge q = 1$, on a aussi $(ap + bq) \wedge (cp + dq)$=1 [voir démonstration de la propriété 5]), par conséquent (2) équivaut à:

$$\tfrac{[a'(p_2+p_3)+b'(q_2+q_3)]m-a'(q_2+q_3)}{[c'(p_2+p_3)+d'(q_2+q_3)]m-c'(q_2+q_3)} = \tfrac{(ap_2+a'p_3+bq_2+b'q_3)m-(aq_2+a'q_3)}{(cp_2+c'p_3+dq_2+d'q_3)m-(cq_2+c'q_3)}\,.$$

Comme $f(x_2) = \frac{ax_2+b}{cx_2+d} = \frac{a'x_2+b'}{c'x_2+d'}$, on a $\frac{ap_2+bq_2}{cp_2+dq_2} = \frac{a'p_2+b'q_2}{c'p_2+d'q_2}$, et vu que les deux fractions précédentes sont sous forme irréductible et ont un numérateur et un dénominateur strictement positifs, on a forcément $ap_2 + bq_2 = a'p_2 + b'q_2$ et $cp_2 + dq_2 = c'p_2 + d'q_2$. L'égalité (2) équivaut alors à:

$$\tfrac{[a'(p_2+p_3)+b'(q_2+q_3)]m-a'(q_2+q_3)}{[c'(p_2+p_3)+d'(q_2+q_3)]m-c'(q_2+q_3)} = \tfrac{[a'(p_2+p_3)+b'(q_2+q_3)]m-(aq_2+a'q_3)}{[c'(p_2+p_3)+d'(q_2+q_3)]m-(cq_2+c'q_3)}\,.$$

Notons que $-c'(q_2+q_3)[a'(p_2+p_3)+b'(q_2+q_3)]+a'(q_2+q_3)[c'(p_2+p_3)+d'(q_2+q_3)] = (q_2+q_3)^2(a'd'-b'c') = (q_2+q_3)^2 \neq 0$; il suffit alors d'utiliser le lemme 6 pour déduire que $a'(q_2+q_3) = aq_2+a'q_3$ et $c'(q_2+q_3) = cq_2+c'q_3$, d'où l'on tire facilement $a = a'$ et $c = c'$. Le fait que $ap_2+bq_2 = a'p_2+b'q_2$ et $cp_2+dq_2 = c'p_2+d'q_2$ implique qu'on a également $b = b'$ et $d = d'$. Finalement, on a pour tout $x \in [x_1; x_3]$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ce qui établit que f est bien de type $\mathcal{H}$ sur $[x_1; x_3]$. $\square$

Nous sommes désormais en mesure d'établir le théorème 1:

Démonstration. Soit f une application non constante et de type $\mathcal{M}$ sur E; montrons que f est de type $\mathcal{H}$ sur E. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $d\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right) = 1$ et $d(k, k+1) = 1$ donc d'après la remarque 3.2, f est de type $\mathcal{H}$ sur $\left[\frac{1}{k+1}; \frac{2}{2k+1}\right]$, $\left[\frac{2}{2k+1}; \frac{1}{k}\right]$, $\left[k; \frac{2k+1}{2}\right]$ et $\left[\frac{2k+1}{2}; k+1\right]$. En particulier, f est de type $\mathcal{H}$ sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$: soient a, b, c et d dans $\mathbb{Z}$ avec $|ad - bc| = 1$, tels que pour tout $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Par une application répétée du lemme 7, on peut voir que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour tout $x \in [1; 2]$, puis pour tout $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$, puis pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ etc. De proche en proche, on en déduit que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{k}; k\right]$. Cela prouve que pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$: f est bien de type $\mathcal{H}$ sur E. Comme ni $ax + b$, ni $cx + d$ ne s'annulent sur E et qu'on a $f > 0$ sur E, les entiers a, b, c et d sont du même signe. Quitte à changer (a, b, c, d) en $(-a, -b, -c, -d)$, on peut donc choisir a, b, c et d dans $\mathbb{N}$. $\square$

References

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (chapter 4.5), second ed., Addison-Wesley, 1994.

[2] R.Ferréol, Addition des cancres, suites de Brocot et friandises associées, *Quadrature* **36** (1999), 13-24.