

Bachelor projekt: Invariant integration

Jens Gerlach Christensen

Dan Rasmussen

19. maj 1997

1 Indledning

Dette bachelorprojekt er skrevet i forårssemestret 1997 ved Københavns Universitet Matematisk Institut. Projektets hovedområde er invariante mål på topologiske grupper. Vi viser eksistens og essentiel entydighed for sådanne på lokalkompakte grupper. For at forstå målteorien kræves fortrolighed med kurserne Mat3MI og Mat3GT eller tilsvarende. Vi benytter A. Haar's originale ide til eksistensbeviset. Men det afhænger af en tællelig basis for topologien. A. Weil viste eksistensen uden brug af 2. tællelighedaksiom. Vi benytter heller ikke 2. tællelighedsaksiom i vores bevis. Til gengæld benytter vi udvalgsaksiomet specielt i form af Tychonoffs sætning. Som inspiration til eksistensbeviset har vi benyttet [Munroe, p.86ff]. Men beviset indeholder enkelte fejl og unødvendige betingelser, så vi har generaliseret en del mellemresultater. Vi kommenterer ikke dette i teksten.

I entydighedsbeviset har vi benyttet en sætning, der egentlig er en variant af Fubinis sætning. Men for fuldstændighedens skyld har vi medtaget beviset.

Vi begrænser os derefter til at se på kompakte grupper, og benytter det invariante mål, til at vise fundamentale resultater i repræsentationsteori for kompakte grupper. For eksempel vises Peter-Weyls sætning. Denne del af projektet støtter sig til kurset Mat3RE, men kurset er ikke en forudsætning for forståelse af projektet.

Vi har skrevet projektet i tæt samarbejde og det har derfor ikke været muligt, at skelne mellem de enkelte dele.

Tak til vores vejleder Henrik Schlichtkrüll.

2 Topologi

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Vi benytter betegnelsen $\mathcal{U}(x)$ for mængden af omegne af $x \in M$ og $\mathcal{O}(x)$ for de åbne omegne.

Lemma 2.1. *Hvis en familie $\{A_i\}_{i \in I}$ af ikke tomme delmængder af en kompakt mængde $K \subseteq M$ er stabil overfor dannelse af endelig fællesmængde, det vil sige, at for vilkårlig $\cap_{j=1}^N A_{i_j}$ findes en mængde i familien, som er indeholdt i $\cap_{j=1}^N A_{i_j}$, så gælder, at $\cap_{i \in I} \overline{A_i} \neq \emptyset$.*

Bevis. Viser ved modstrid. Antag, at $\{A_i\}_{i \in I}$ er stabil overfor dannelse af endelige fællesmængder. Antag også, at $\cap_{i \in I} \overline{A_i} = \emptyset$. Ved overgang til komplementærmængder fås, at $\cup_{i \in I} \overline{\mathcal{C}A_i} = K$. Da dette er en åben overdækning af en kompakt mængde, kan

den udtyndes til endelig overdækning $\cup_{j=1}^N \mathbb{C}\overline{A_{i_j}}$. Ved at gå tilbage med komplement fås $\cap_{j=1}^N \overline{A_{i_j}} = \emptyset$. Men da $\emptyset \neq \cap_{j=1}^N A_{i_j} \subseteq \cap_{j=1}^N \overline{A_{i_j}}$ er der opnået en modstrid. $\square$

Her følger nogle klassificeringer af topologiske rum.

Definition 2.2.

- (T_1) Et topologisk rum kaldes T_1 , hvis der for alle punkter $x_1 \neq x_2$ findes $O_1 \in \mathcal{O}(x_1)$ og $O_2 \in \mathcal{O}(x_2)$ så $x_1 \notin O_2$ og $x_2 \notin O_1$.
- (T_2) Et topologisk rum kaldes T_2 , hvis der for alle punkter $x_1 \neq x_2$ findes $O_1 \in \mathcal{O}(x_1)$ og $O_2 \in \mathcal{O}(x_2)$ så $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. (Kaldes også Hausdorff rum.)
- (T_3) Et topologisk rum kaldes T_3 , hvis for alle x og alle ikke tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 så $x \in O_1$ og $F \subseteq O_2$. Hvis rummet tillige er T_1 kaldes det et regulært rum.
- ($T_{3,5}$) Et topologisk rum kaldes $T_{3,5}$, hvis for alle x og alle ikke tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes en kontinuert funktion $f : M \rightarrow [0, 1]$ med $f(x) = 0$ og $f(F) = \{1\}$. Sammen med T_1 kaldes rummet fuldstændig regulært.
- (T_4) Et topologisk rum kaldes T_4 , hvis for alle ikke tomme disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 findes disjunkte $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ så $F_1 \subseteq O_1$ og $F_2 \subseteq O_2$. Sammen med T_1 kaldes rummet normalt.

Et normalt rum er, ved Urysohns lemma [3GT], et fuldstændigt regulært rum og et fuldstændigt regulært rum er regulært (da topologien på $[0, 1]$ er Hausdorff). Desuden er et Hausdorff rum automatisk T_1 . Hvis $(M, \mathcal{T})$ er et regulært rum er det også et Hausdorff rum.

Sætning 2.3.

- (i) Et topologisk rum er T_1 hvis og kun hvis enhver singletonmængde er afsluttet.
- (ii) Et topologisk rum er T_2 hvis og kun hvis der for enhver x og ethvert $y \neq x$ findes en afsluttet $U \in \mathcal{U}(x)$ med $y \notin U$.
- (iii) Et topologisk rum er T_3 hvis og kun hvis der for alle x og enhver $O_1 \in \mathcal{O}(x)$ findes $O_2 \in \mathcal{O}(x)$ med $O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$.
- (iv) Et topologisk rum er T_4 hvis og kun hvis for alle afsluttede mængder F og alle $O_1 \in \mathcal{T}$ indeholdene F findes $O_2 \in \mathcal{T}$ så $F \subseteq O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$.

Bevis. (i) Påstanden følger af, at $\forall x$ er $\{x\}$ afsluttet $\Leftrightarrow \forall x : \mathbb{C}\{x\}$ er åben $\Leftrightarrow \forall x \forall y \in \mathbb{C}\{x\} \exists O_y \in \mathcal{O}(y) : x \notin O_y$. Da y også vil være en afsluttet mængde er dette det samme som at kræve T_1 .

(ii) Vælg en afsluttet omegn U af x . Så findes åben omegn O_x af x så $O_x \subseteq U$ og da $\mathbb{C}U$ er åben findes for hvert $y \in \mathbb{C}U$ omegn O_y af y så da x og y er valgt vilkårlige, er T_2 opfyldt. Omvendt givet O_x og O_y som i T_2 vil O_x være indeholdt i den afsluttede mængde $\mathbb{C}O_y$, så med $U = \overline{O_x}$ vil $U \subseteq \mathbb{C}O_y$.

(iii) Antag T_3 og lad O_1 være en åben mængde. $\mathbb{C}O_1$ er afsluttet og for hvert $x \in O_1$ findes disjunkte $O, O_2 \in \mathcal{T}$ så $x \in O_2$ og $\mathbb{C}O_1 \subseteq O$ ifølge T_3 . Derfor er $O_2 \subseteq \mathbb{C}O \subseteq O_1$ og det følger, at $O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$. Antag omvendt, at for hver $O_1 \in \mathcal{T}$ findes $O_2 \in \mathcal{O}(x)$ så $O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$. Givet vilkårligt $x \in M$ og vilkårlig afsluttet mængde F med $x \notin F$. $\mathbb{C}F$ er åben så der findes $O_2 \in \mathcal{O}(x)$ så $O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq \mathbb{C}F$. Sæt $O_1 = \mathbb{C}\overline{O_2}$ så vil $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og $F \subseteq O_1$.

(iv) Antag at for alle afsluttede F og åbne O_1 indeholdende F findes $O_2 \in \mathcal{T}$ så $F \subseteq O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$. Givet $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ begge afsluttede vil $F_2 \subseteq \mathbb{C}F_1$. Derfor findes $O_2 \in \mathcal{T}$ så $F_2 \subseteq O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq \mathbb{C}F_1$. Med $O_1 = \mathbb{C}\overline{O_2}$ fås da $F_1 \subseteq O_1$, $F_2 \subseteq O_2$ og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Antag omvendt T_4 . Givet F afsluttet og $O_1 \supseteq F$. $\mathbb{C}O_1$ er afsluttet og disjunkt med F . Der findes derfor disjunkte åbne mængder O_2 og O så $F \subseteq O_2$ og $\mathbb{C}O_1 \subseteq O$. Derfor gælder, at $F \subseteq O_2 \subseteq \mathbb{C}O \subseteq O_1$ og derfor vil $F \subseteq O_2 \subseteq \overline{O_2} \subseteq O_1$. $\square$

I næste får vi brug for følgende definition.

Definition 2.4. Et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$ kaldes lokalkompakt, hvis ethvert punkt har en kompakt omegn.

3 Topologiske grupper

Definition 3.1. $(G, \cdot, \mathcal{T})$ kaldes en topologisk gruppe, hvis

- (i) $(G, \mathcal{T})$ er et topologisk rum,
- (ii) $(G, \cdot)$ er en gruppe og
- (iii) Afbildning en $(x, y) \mapsto x^{-1} \cdot y$ er en kontinuert afbildning fra $G \times G \rightarrow G$.

Det ses, at det tredje krav er ækvivalent med, at kræve at $x \mapsto x^{-1}$ og $(x, y) \mapsto x \cdot y$ er kontinuerte. Desuden ses, at $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto h \cdot x$ og $x \mapsto x \cdot h$ (for alle $h \in G$) er homeomorfier. Derfor er det altså nok at betragte omegne af e (topologien er translationsinvariant). Herefter udelades $\cdot$ for gruppekompositionen.

Eksempel 3.2. $(\mathbb{R}^n, +)$ udgør en lokalkompakt Hausdorff gruppe.

Udstyres $GL(n, \mathbb{R})$ med delrumstopologien fra $\mathbb{R}^{n^2}$ bliver $GL(n, \mathbb{R})$ klart et lokalkompakt Hausdorff rum. Af

$$AB = \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j}$$

for $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ følger, at matrixmultiplikation er kontinuert. Man ser lige så let, at inversdannelse er kontinuert.

Sætning 3.3. For enhver omegn $U \in \mathcal{U}(e)$ findes en symmetrisk omegn $V \in \mathcal{U}(e)$, så $V \cdot V \subseteq U$.

Bevis. Lad $U \in \mathcal{U}(e)$ være givet. Idet $(g, h) \mapsto gh$ er kontinuert og $(e, e) \mapsto e$, findes omegne $V_1, V_2 \in \mathcal{U}(e)$ så $(V_1, V_2) \mapsto U$ det vil sige $V_1 V_2 \subseteq U$. Ved at sætte $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ fås en mængde som ønsket. $\square$

Korollar 3.4. *Enhver topologisk gruppe er T_3 .*

Bevis. Ifølge sætning 2.3(iii) er det nok at vise, at $\forall U \in \mathcal{U}(e) \exists V \in \mathcal{U}(e) : \overline{V} \subseteq U$. Lad $U \in \mathcal{U}(e)$ være givet og vælg i henhold til sætning 3.3 $V \in \mathcal{U}(e)$ symmetrisk. Følgende gælder da:

$$\begin{aligned} x \in G \setminus U &\Rightarrow x \in G \setminus VV = G \setminus V^{-1}V \Rightarrow \forall v_1, v_2 \in V : x \neq v_1^{-1}v_2 \\ &\Rightarrow \forall v_1 \in V : v_1x \notin V \Rightarrow Vx \cap V = \emptyset. \end{aligned}$$

Da Vx er en omegn af x er fundet en omegn af x , der er disjunkt med V , det vil sige, at $x \notin \overline{V}$. Derfor er fundet V så $\overline{V} \subseteq U$ som ønsket. $\square$

Korollar 3.5. *En topologisk gruppe, der er T_1 er regulær og specielt Hausdorff.*

Bemærkning 3.6. Lad G være en topologisk gruppe. Af beviset ovenfor ses, at vi faktisk finder en symmetrisk omegn V af e , så $\overline{V} \subseteq U$ for $U \in \mathcal{U}(e)$. $\overline{V}$ er ligeledes symmetrisk, thi hvis $x \in \overline{V}$ da findes et net $(x_\lambda) \subseteq V$ som konvergerer mod x . Da inversdannelse er kontinuert, vil $x_\lambda^{-1} \rightarrow x^{-1}$ og da $x_\lambda^{-1} \in V$ vil $x \in \overline{V}$. Hvis G er lokalkompakt, findes en kompakt omegn K af e og for alle omegne $U \subseteq K$ af e findes ifølge ovenstående symmetriske kompakte omegne af e (afsluttede delmængder af kompakte mængder er kompakte).

I det følgende vil vi betragte kvotientgrupper og restklasserne svarende til $x \in G$ betegnes $[x]$.

Sætning 3.7. *Lad G være en topologisk gruppe og H en normal undergruppe i G . Hvis G/H udstyres med finaltopologien $\mathcal{T}_H = \{O \subseteq G/H \mid \kappa^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$ med hensyn til den kanoniske homomorfi $\kappa : G \rightarrow G/H$, da gælder:*

- (i) κ er åben og kontinuert,
- (ii) G/H er en topologisk gruppe,
- (iii) hvis H er afsluttet er G/H Hausdorff og
- (iv) hvis $\mathcal{B}$ er omegnsbasis for $\mathcal{T}$ er $\{\kappa(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$ omegnsbasis for $\mathcal{T}_H$.

Bevis. (i) κ er kontinuert, idet $\mathcal{T}_H$ er finaltopologien med hensyn til κ . Hvis $O \in \mathcal{T}$ vil

$$\kappa^{-1}(\kappa(O)) = \kappa^{-1}(\cup_{o \in O} \{[o]\}) = \cup_{o \in O} (o \cdot H) = \cup_{h \in H} O \cdot h \in \mathcal{T},$$

da topologien er translationsinvariant. Da $\kappa(O) \in \mathcal{T}_H$, er κ en åben afbildning.

(ii) Det ses, at $(G/H, \mathcal{T}_H)$ opfylder (i) og (ii) i definition 3.1 (jvf. mat 2AL). Lad $i : g \mapsto g^{-1}$, $i_H : [g] \mapsto [g]^{-1}$ være inversdannelser på de to grupper. Det haves, at $i_H \circ \kappa = \kappa \circ i$. Da κ er kontinuert og i er kontinuert er i_H kontinuert (idet $\mathcal{T}_H$ er finaltopologien jvf. [3GT sætning II.4.14]).

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i} & G \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa \\ G/H & \xrightarrow{i_H} & G/H \end{array}$$

Multiplikation i G/H kontinuert, thi lad $W \in \mathcal{U}([e])$ i G/H . I henhold til sætning 3.3 kan vælges $V \in \mathcal{U}(e)$ i G , så $VV \subseteq \kappa^{-1}(W)$. Så er $\kappa(V)\kappa(V) = \kappa(VV) \subseteq W$ og da den kanoniske afbildning er åben vil $\kappa(V) \in \mathcal{U}([e])$ i G/H .

(iii) Hvis H er afsluttet i $\mathcal{T}$ vil $\{[e]\}$ være afsluttet i $\mathcal{T}_H$ (κ er en åben afbildning), og da topologien er translationsinvariant følger, at $\forall [g] \in G/H : \{[g]\}$ afsluttet. Altså er G/H et T_1 -rum og dermed Hausdorff.

(iv) Umiddelbar konsekvens af (i). □

Bemærkning 3.8. Hvis H er normal undergruppe af G så er $\overline{H}$ ligeledes en normal undergruppe af G . Thi for $a, b \in \overline{H}$; lad $(a_\lambda), (b_\lambda)$ være net i H så $a_\lambda \rightarrow a, b_\lambda \rightarrow b$. Idet $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ er kontinuert og H er en undergruppe, vil $H \ni a_\lambda b_\lambda^{-1} \rightarrow ab^{-1} \in \overline{H}$ ifølge [3GT sætning 7.14]. Derfor er $\overline{H}$ en undergruppe. Hvis H er normal i G vil $H \supseteq gHg^{-1}$ for alle $g \in G$. Afbildningen $h \mapsto ghg^{-1}$ er kontinuert, så for et net $h_\lambda \rightarrow h \in \overline{H}$ vil $gh_\lambda g^{-1}$ i $gHg^{-1} \subseteq H$ konvergere mod ghg^{-1} som så må ligge i $\overline{H}$ for alle $g \in G$. Altså er $\overline{H}$ en normal undergruppe.

Lemma 3.9. *Hvis C er kompakt, D er afsluttet og $C \cap D = \emptyset$, da findes omegn U af e , så $CU \cap DU = \emptyset$.*

Bevis. Hvis $C = \emptyset$ er påstanden klar. Lad $x \in C$. Da D er afsluttet er komplementet åbent og derfor findes ifølge sætning 3.3 en symmetrisk omegn Y_x af e så $xY_xY_x \cap D = \emptyset$, hvor translationsinvariansen af topologien er benyttet. Ved at benytte sætning 3.3 igen fås, at der findes en symmetrisk omegn V_x så $xV_xV_xV_x \subseteq xY_xY_x \subseteq xY_xY_x$. Derfor er $(xV_xV_xV_x) \cap D = \emptyset$. Således er xV_xV_x og DV_x disjunkte, for ellers findes $d \in D$ og $v_1, v_2, v_3 \in V_x$ så $xv_1v_2 = dv_3^{-1}$ (idet V_x er symmetrisk), så $d = xv_1v_2v_3$, men dette er jo element i både D og $xV_xV_xV_x$, som er disjunkte. Da C er kompakt, findes endelig mange x_i så $C \subseteq (x_1V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_nV_{x_n})$. Ved at sætte $U = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ fås

$$CU \subseteq \cup_{i=1}^n (x_iV_{x_i}U) \subseteq \cup_{i=1}^n (x_iV_{x_i}V_{x_i}).$$

Men ingen af mængderne i sidste udtryk har noget til fælles med DU . Dermed er fundet en omegn som ønsket. □

For Hausdorff grupper gælder specielt følgende, idet kompakte mængder her er afsluttede.

Korollar 3.10. *Hvis C og D er kompakte og disjunkte mængder i en Hausdorff gruppe, findes $O \in \mathcal{O}(e)$ så $CO^{-1} \cap DO^{-1} = \emptyset$.*

Til sidst en sætning, som ikke har betydning for resten af projektet.

Sætning 3.11. *Enhver topologisk gruppe er $T_{3,5}$.*

Bevis. Givet en vilkårlig afsluttet mængde F med $e \notin F$. $G \setminus F$ er en åben omegn af e og sætning 3.1 giver så, at der findes en åben symmetrisk omegn V af e med $VV \subseteq G \setminus F$. Dette argument kan gentages for V og vi kan derfor rekursivt konstruere en dalende følge $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ af åbne omegne af e så $U_{i+1}^2 \subseteq U_i \subseteq G \setminus F$. Sæt $V_{2^i} = U_i$ og $V_1 = G \setminus F$. For et dyadisk tal $r \in]0, 1[$ (i.e. $\frac{k}{2^n}$) findes entydig fremstilling

$$r = 2^{-l_1} + 2^{-l_2} + \dots + 2^{-l_p}, \text{ hvor } 0 < l_1 < \dots < l_p \text{ er heltal.} \quad (3.1)$$

Sæt så $V_r = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} \dots V_{2^{-l_p}}$ samt $V_0 = \cap \{V_r | r \in]0, 1[\text{ dyadisk} \}$ (bemærk, at V_0 ikke nødvendigvis er åben). Der gælder så, at $e \in V_r$, hvor $r \in [0, 1]$ er dyadisk. Vi viser nu, at for dyadiske tal $0 \leq r < s \leq 1$ gælder, at

$$V_r \subseteq V_s, \quad 0 \leq r < s \leq 1. \quad (3.2)$$

For $r = 2^{-l_1} + 2^{-l_2} + \dots + 2^{-l_p}$ og $s = 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \dots + 2^{-m_q}$ findes entydigt heltal k , så $m_i = l_i$ for $i < k$ (der er jo egentlig tale om det binære talsystem). Sæt

$$W = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} \dots V_{2^{-l_{k-1}}} = V_{2^{-m_1}} V_{2^{-m_2}} \dots V_{2^{-m_{k-1}}}$$

så er

$$\begin{aligned} V_r &= W V_{2^{-l_k}} V_{2^{-l_{k+1}}} \dots V_{2^{-l_p}} \\ &\subseteq W V_{2^{-l_k}} V_{2^{-l_{k-1}}} V_{2^{-l_{k-2}}} \dots V_{2^{-l_{p+1}}} V_{2^{-l_p}} \text{ indskyd mellemliggende mængder og } V_{2^{-l_p}} \\ &\subseteq W V_{2^{-l_k}} V_{2^{-l_{k-1}}} V_{2^{-l_{k-2}}} \dots V_{2^{-l_{p+1}}} V_{2^{-l_p}}^2 \subseteq V_{2^{-l_{p+1}}} \\ &\subseteq \dots \\ &\subseteq W V_{2^{-l_k}} V_{2^{-l_k}} = W V_{2^{-l_{k-1}}} = W V_{2^{-m_{k-1}}} \\ &\subseteq W V_{2^{-m_k}} V_{2^{-m_{k+1}}} \dots V_{2^{-m_q}} = V_s. \end{aligned}$$

Dernæst viser vi, at for hvert dyadisk tal $r \in [0, 1[$ og hvert $l \in \mathbb{N}$ gælder

$$V_r V_{2^{-l}} \subseteq V_{r+2^{-l}}. \quad (3.3)$$

Hvis $r + 2^{-l} = 1$ er påstanden oplagt så vi antager, at $r + 2^{-l} < 1$. Hvis $l > l_p$, så er

$$V_r V_{r+2^{-l}} = V_{r+2^{-l}} \quad (3.4)$$

per definition af mængderne og (3.3) opnås. Antag at $l \leq l_p$, og lad k være det heltal i fremstillingen (3.1) så $l_{k-1} < l < l_k$ (sæt $l_0 = 0$). Lad

$$r_1 = 2^{-l+1} - 2^{-l_k} - 2^{-l_{k-1}} - \dots - 2^{-l_1} \text{ og } r_2 = r + r_1.$$

Da ses klart, at $r < r_2 < r + 2^{-l+1}$. Benyttes (3.2), (3.4) og (3.2) igen, fås

$$V_r V_{2^{-l}} \subseteq V_{r_2} V_{2^{-l}} = V_{r_2+2^{-l}} \subseteq V_{r+2^{-l+1}+2^{-l}} \subseteq V_{r+2^{-l+2}}.$$

Hermed er (3.3) påvist.

Betragt mængderne V_0 og V_1 . Der gælder, at

$$e \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_1,$$

idet $\overline{V_0} \subseteq V_0 V_{2^{-3}}$ ifølge (3.3). Ved samme argument, ses at

$$\overline{V_0} \subseteq V_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{4}}} \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq V_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{V_{\frac{3}{4}}} \subseteq V_1.$$

Denne proces kan fortsættes; så der gælder $\overline{V_r} \subseteq V_s$ når $r < s$. Definer funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in F \\ \inf\{r | x \in V_r\} & \text{for } x \in G \setminus F. \end{cases}$$

Da er $f(G) \subseteq [0, 1]$, $f(F) = 1$ og $f(e) = 0$. Det skal vises, at f er kontinuert.

Antag, at $x \in G$ så $0 < f(x) < 1$ og lad U være omegn af $f(x)$ i $[0, 1]$. Der findes da dyadiske tal $0 < r < f(x) < s < 1$, så $[r, s] \subseteq U$. Sæt $V = (G \setminus \overline{V_r}) \cap V_s$ som er åben. Af $f(x) < s$ ses, at $x \in V_s$, og af $r < f(x)$ følger, at $x \notin \overline{V_r}$. Derfor vil $x \in V$, som således er en åben omegn af x . For ethvert $y \in V$ vil $f(y) \in [r, s]$, idet $y \notin \overline{O_r}$ giver $r \leq f(y)$ og $y \in O_r$ giver $s \geq f(y)$. Derfor er $f(V) \subseteq U$ og $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. f er altså kontinuert i x . I endepunkterne 0 og 1 kan samme argument bruges, og derfor er f kontinuert. Det er nu vist, at G er $T_{3,5}$. $\square$

Inspiration til dette bevis er fundet i [3GT, Urysohns lemma].

4 Haar målet og dets eksistens for lokalkompakte grupper

Definition 4.1. Et Borelmål μ på et lokalkompakt topologisk rum kaldes et regulært Borel mål, hvis

- (i) Enhver kompakt mængde er μ -målelig,
- (ii) for enhver μ -målelig mængde A er $\mu(A) = \inf\{\mu(U) | A \subseteq U, U \text{ åben}\}$,
- (iii) og for enhver åben mængde U er $\mu(U) = \sup\{\mu(C) | C \subseteq U, C \text{ kompakt}\}$.

Hvis et mål opfylder henholdsvis (ii) og (iii) kaldes målet et ydre regulært mål henholdsvis et indre regulært mål.

Definition 4.2. Et regulært Borelmål μ på en lokalkompakt gruppe G kaldes et venstre Haar mål, hvis følgende er opfyldt:

- (i) Enhver kompakt mængde er μ -målelig.
- (ii) Målet af en kompakt mængde er endeligt.
- (iii) μ er ikke nulmålet
- (iv) $\mu(xE) = \mu(E)$ for enhver Borelmængde E og $x \in G$.

Et højre Haar mål defineres tilsvarende som et højreinvariant mål. Hvis et mål både er venstre og højre Haar mål siges målet blot at være et Haar mål.

I dette afsnit vil vi vise, at der for enhver lokalkompakt gruppe eksisterer et venstre Haar mål. Deraf vil eksistensen af et højre Haar mål også følge. Vi benytter en del af den teori, der er blevet opbygget i 3MI. Lad i det følgende G være en lokalkompakt Hausdorff gruppe, $C \subseteq G$ kompakt og lad $N \in \mathcal{O}(e)$. Da topologien er translationsinvariant er $\{xN \mid x \in C\}$ en åben overdækning af C . Idet C er kompakt kan dette reduceres til en endelig overdækning. Vi kan derfor tale om et mindste *overdækningsindeks* som betegnes $(C : N)$; det er det mindste antal translationer af N af ovenstående type, hvis forening overdækker C . Da dette er et groft mål for hvor meget større C er end N er det måske

mere på sin plads, at tale om en overdækning i forhold til en fast kompakt omegn C_0 . Derfor definerer vi

$$\tau_N(C) = \frac{(C : N)}{(C_0 : N)}. \quad (4.1)$$

Denne idé viser sig at være frugtbar i vores konstruktion af et mål som ønsket, som det skal ses. Følgende sætning er et skridt på vejen:

Proposition 4.3. *Lad C_0 og N være givne. Hvis samtidig C og D er kompakte delmængder af G , så gælder*

- (i) $0 \leq \tau_N(C) < \infty$ for enhver kompakt mængde C ,
- (ii) hvis $C \subseteq D$, er $\tau_N(C) \leq \tau_N(D)$,
- (iii) $\tau_N(C \cup D) \leq \tau_N(C) + \tau_N(D)$,
- (iv) $\tau_N(C \cup D) = \tau_N(C) + \tau_N(D)$, hvis $CN^{-1} \cap DN^{-1} = \emptyset$,
- (v) for $x \in G$ er $\tau_N(xC) = \tau_N(C)$.

Bevis. De to første påstande er oplagte. Den tredje følger af, at en overdækning af C og en overdækning af D tilsammen overdækker $C \cup D$. Den fjerde ses af, at en translation af N med et element $x \in C$ ikke indeholder noget element fra D og omvendt. For antages at $y \in xN \cap D$ for $x \in C$ så vil $x \in DN^{-1}$ dette er i modstrid med antagelsen, som giver at $C \cap DN^{-1} = \emptyset$. Omvendt hvis $x \in yN \cap C$ for $y \in D$ vil $y \in CN^{-1}$ som igen er modstrid. Man kan sige, at ingen mængde fra overdækningen af D kan erstattes af en mængde fra overdækningen af C . For overdækningstallene gælder derfor, at $(C : N) + (D : N) = (C \cup D : N)$, hvorefter påstanden følger. Den femte påstand ses af, at en overdækning af C ved translation med x bringes til at overdække xC og omvendt ved translation med x^{-1} . $\square$

Proposition 4.4. *For fast C_0, C findes et kompakt interval $[0, k_C]$ så $\tau_N(C) \in [0, k_C]$ for alle $N \in \mathcal{O}(e)$.*

Bevis. Lad k_C være det mindste antal translationer af C_0° der dækker C . For hvert $N \in \mathcal{O}(e)$ vil $k_C(C_0 : N)$ translationer af N dække C . Derfor er $(C : N) \leq k_C(C_0 : N)$, hvorefter påstanden følger. $\square$

Vi vælger nu en fast kompakt omegn C_0 . Med $\mathcal{K}$ betegnes mængden af alle kompakte delmængder af G . Dan følgende produktrum:

$$P = \prod_{C \in \mathcal{K}} [0, k_C] = \{\psi : \mathcal{K} \rightarrow \cup_{C \in \mathcal{K}} [0, k_C] \mid \forall C \in \mathcal{K} : \psi(C) \leq k_C\}. \quad (4.2)$$

Ifølge propositionen ovenfor vil $\tau_N \in P$ for enhver åben omegn N af e . Definér delmængden T_N af P ved:

$$T_N = \{\tau_M \mid M \subseteq N, M \text{ åben omegn af } e\}. \quad (4.3)$$

Foreningen af endelig mange åbne mængder er igen åben, så givet $N_1, \dots, N_n \in \mathcal{O}(e)$ findes åben omegn M af e , så $M \subseteq \cap_{i=1}^n N_i$, dvs. at $\tau_M \in T_{N_i}$ for $i = 1, \dots, n$. Altså

er $\tau_M \in \cap_{i=1}^n T_{n_i}$, hvorfor $\{T_N \mid N \in \mathcal{O}(e)\}$ er stabil overfor dannelse af endelig foreningsmængde. Ifølge Tychonoffs sætning [3GT] er P kompakt, så lemma 2.1 giver, at $\cap_N \overline{T}_N \neq \emptyset$. Vælg τ_0 i denne mængde. Hvis U er åben defineres

$$\tau(U) = \sup\{\tau_0(D) \mid D \subseteq U, D \text{ er kompakt.}\}$$

Det ses, at $\tau(\emptyset) = 0$. Ved hjælp af τ og topologien $\mathcal{T}$ er det nu muligt, at konstruere et ydre mål. Det ydre mål defineres som

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i \in I} \tau(K_i) \mid A \subseteq \cup_{i \in I} K_i, K_i \in \mathbb{K}, I \text{ numerabel}\right\}.$$

for hvert $A \in \mathbb{P}(G)$ (potensmængden på G). Det skal nævnes, at det ydre mål defineret på denne måde er tælleligt subadditivt, altså at

$$\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i), \quad A_i \in \mathbb{P}(G), \quad (4.4)$$

samt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ når $A \subseteq B$ og $\mu^*(\emptyset) = 0$. Disse er netop kravene til et ydre mål.

Definition 4.5. En mængde $E \subseteq G$ kaldes μ^* -målelig, hvis

$$\forall A \subseteq G : \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Familien af μ^* -målelige mængder betegnes $\mathbb{M}$ og denne er en σ -algebra.

$\mathbb{M}$ afhænger af den kompakte mængde C_0 . Det vigtige ved denne definition ligger i følgende resultat, som er blevet bevist i [3MI]

Sætning 4.6 (Caratheodory). Restriktionen $\mu = \mu^*|_{\mathbb{M}}$ af et ydre mål μ^* i G til $\mathbb{M}$ er et mål i G .

For at vise, at vi på denne måde kan frembringe et venstre Haar-mål μ på G , skal vi vise, at $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{M}$ målet af kompakte mængder er endeligt, μ ikke er nulmålet samt, at μ er venstre invariant. Det er praktisk at opsplitte problemet og først vise nogle egenskaber for τ_0 og τ .

Sætning 4.7. Om τ_0 gælder

- (i) Hvis C og D er kompakte, så $\tau_0(C \cup D) \leq \tau_0(C) + \tau_0(D)$. Der gælder lighedstegn hvis C og D er disjunkte.
- (ii) Hvis $C \subseteq D$ begge er kompakte er $\tau_0(C) \leq \tau_0(D)$.
- (iii) For C kompakt og $x \in G$ er $\tau_0(xC) = \tau_0(C)$.
- (iv) $\tau_0(C_0) = 1$.

Bevis. (i) For hver kompakt mængde C er $f_C : P \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f_C(\sigma) = \sigma(C)$, kontinuert, idet for ethvert konvergent net $\sigma_\lambda \rightarrow \sigma$ i P gælder, at $\sigma_\lambda(C) \rightarrow \sigma(C)$. Mængden $A_1 = \{\sigma \mid \sigma(C \cup D) \leq \sigma(C) + \sigma(D)\}$ er afsluttet, da den er originalmængde til $[0, \infty[$ for funktionen $g = f_C + f_D - f_{C \cup D}$ som er kontinuert. Ifølge (iii) fra proposition 4.3 vil $\tau_N \in A_1$ for hvert N så $T_N \subseteq A_1$ for hvert N og da A_1 er afsluttet vil $\overline{T}_N \subseteq A_1$. Derfor vil $\tau_0 \in \overline{T}_N \subseteq A_1$ (for alle N) og deraf følger første påstand.

Hvis C og D er kompakte og disjunkte findes (lemma 3.10) N_0 så $CN_0^{-1} \cap DN_0^{-1} = \emptyset$. Ved (iv) fra proposition 4.3 er $T_{N_0} \subseteq A_2 = \{\sigma \mid \sigma(C \cup D) = \sigma(C) + \sigma(D)\}$. Da A_2 er afsluttet (originalmængde for g til $\{0\}$) gælder $\tau_0 \in \overline{T}_{N_0} \subseteq A_2$ og anden påstand er vist.

(ii) Lad $A_3 = \{\sigma \mid \sigma(C) \leq \sigma(D)\}$. A_3 er afsluttet og $T_N \subseteq A_3$ (proposition 4.3(ii)) og derfor $\tau_0 \in \overline{T}_N \subseteq A_3$.

På lignende vis resoneres for $A_4 = \{\sigma \mid \sigma(xC) = \sigma(C)\}$ og $A_5 = \{\sigma \mid \sigma(C_0) = 1\}$ og dermed er også bevist (iii) og (iv). $\square$

Af dette kan sluttes

Korollar 4.8. Hvis U_1 og U_2 er åbne mængder, så gælder at $\tau(U_1 \cup U_2) \leq \tau(U_1) + \tau(U_2)$.

Bevis. Lad $E \subseteq U_1 \cup U_2$ være kompakt. Mængderne $E \setminus U_1$ og $E \setminus U_2$ er disjunkte og kompakte, da de er afsluttede delmængder af E . Ifølge [3GT, sætning 6.12], benyttet på det kompakte Hausdorff rum E , findes åbne disjunkte mængder O_1 og O_2 så $E \setminus U_1 \subseteq O_1$ og $E \setminus U_2 \subseteq O_2$. Derfor vil $E \setminus O_1 \subseteq U_1$, $E \setminus O_2 \subseteq U_2$ samt $E \setminus O_1 \cup E \setminus O_2 = E$. Deraf følger

$$\tau_0(E) \leq \tau_0(E \setminus O_1) + \tau_0(E \setminus O_2) \leq \tau(U_1) + \tau(U_2).$$

Da dette gælder for vilkårlige kompakte delmængder E af $U_1 \cup U_2$ følger påstanden. $\square$

Korollar 4.9. Hvis C er kompakt så er $\mu^*(C) \geq \tau_0(C)$.

Bevis. Lad C være overdækket af tællelig forening af U_i hvor U_i er åben. Udtynd til endelig overdækning $C \subseteq \cup_{j=1}^n U_{i_j}$. Da $\tau(\cup_{j=1}^n U_{i_j}) = \sup\{\tau_0(D) \mid D \subseteq \cup_{j=1}^n U_{i_j}, D \text{ kompakt}\}$ er $\tau_0(C) \leq \tau(\cup_{j=1}^n U_{i_j})$. Ved foregående korollar er

$$\tau(\cup_{j=1}^n U_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^n \tau(U_{i_j}) \leq \sum_i \tau(U_i).$$

Derfor er $\tau_0(C) \leq \inf \sum \tau(U_i) = \mu^*(C)$. $\square$

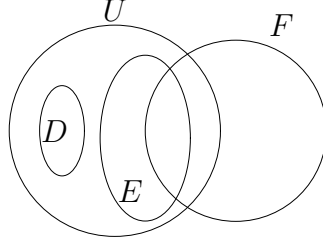
Sætning 4.10. Enhver afsluttet mængde er μ^* -målelig.

Bevis. Først vil vi vise, at hvis F er afsluttet og U er åben, så vil

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap F) + \mu^*(U \setminus F). \quad (4.5)$$

Vælg en kompakt mængde $D \subseteq U \setminus F$ og vælg dernæst $E \subseteq U \setminus D$. D og E er disjunkte og $D \cup E \subseteq U$, så ifølge korollar 4.9 og sætning 4.7(i) gælder, at

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(D \cup E) \geq \tau_0(D \cup E) = \tau_0(D) + \tau_0(E). \quad (4.6)$$



Figur 1: Skitse af mængder i bevis for sætning 4.10.

For fast $D \subseteq U \setminus F$ gælder

$$\mu^*(U) \geq \tau_0(D) + \sup\{\tau_0(E) | E \subseteq U \setminus D\} = \tau_0(D) + \tau(U \setminus D) \geq \tau_0(D) + \mu^*(U \cap F),$$

Det følger, at

$$\begin{aligned} \mu^*(U) &\geq \sup\{\tau_0(D) | D \subseteq U \setminus F\} + \mu^*(U \cap F) = \tau(U \setminus F) + \mu^*(U \cap F) \\ &\geq \mu^*(U \setminus F) + \mu^*(U \cap F), \end{aligned}$$

Dermed er (4.5) blevet påvist. Lad A være en vilkårlig mængde med $\mu^*(A) < \infty$ (ellers er uligheden oplagt) og lad F være afsluttet. Til vilkårligt $\epsilon > 0$ findes en overdækning $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ med åbne mængder U_i så $\mu^*(A) + \epsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \tau(U_i)$, hvilket følger direkte af definitionen af det ydre mål. Det følger derfor ved (4.5) at

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \epsilon &> \sum_{i=1}^{\infty} \tau(U_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(U_i \cap F) + \mu^*(U_i \setminus F)) \\ &\geq \mu^*((\cup_{i=1}^{\infty} U_i) \cap F) + \mu^*((\cup_{i=1}^{\infty} U_i) \setminus F) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F). \end{aligned}$$

Den næstsidste vurdering følger af, at μ^* er tælleligt subadditivt. Da ϵ var vilkårlig følger, at enhver afsluttet mængde F er μ^* -målelig. $\square$

Bemærkning 4.11. Da de afsluttede mængder frembringer Borelalgebraen på $(G, \mathcal{T})$, er $\mathcal{B}$ indeholdt i $\mathbb{M}$. I øjeblikket G et Hausdorff rum, så de kompakte mængder er afsluttede. Derfor er de kompakte mængder μ^* -målelige.

Sætning 4.12. *Det fundne mål μ er et regulært Borel mål.*

Bevis. Vi checker påstandene i definition 4.1. Første påstand er oplagt da vi μ er et Borelmål.

(ii) Lad A være μ -målelig og antag, at $\mu(A) < \infty$. Det skal vises, at

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) | A \subseteq U, U \text{ er åben}\}.$$

Hvis $A \subseteq U$ er $\mu(A) \leq \mu(U)$ og så er $\mu(A) \leq \inf_{A \subseteq U} \mu(U)$. Den modsatte ulighed indses ved følgende argument. Til vilkårligt $\epsilon > 0$ findes tællelig åben overdækning $A \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, så

$$\mu(A) + \epsilon > \sum_{i \in I} \tau(U_i) \geq \mu(\cup_{i \in I} U_i) \geq \inf\{\mu(U) | U \text{ åben og } A \subseteq U\}$$

idet $\cup_I U_i$ er en åben mængde. Da ϵ var vilkårlig følger påstanden.

(iii) Lad åben mængde U være givet. Hvis C er kompakt delmængde af U , vil $\mu(C) \leq \mu(U)$ så $\sup\{\mu(C) | C \subseteq U\} \leq \mu(U)$. Den omvendte ulighed følger af, at $\tau(U) \geq \mu(U)$ og

$$\tau(U) = \sup\{\tau(D) | D \subseteq U, D \text{ kompakt}\} \leq \sup\{\mu(D) | D \subseteq U, D \text{ kompakt}\}$$

ifølge korollar 4.9. □

Sætning 4.13. *Det fundne mål μ er et venstre Haar mål.*

Bevis. μ er som vist et regulært Borelmål. Vi checker egenskaberne fra definition 4.2. (i) Jævnfør bemærkning ovenfor.

(ii) Hvis D er kompakt, kan D overdækkes af endelig mange kompakte omegne $\cup_{i=1}^n K_i^\circ$ (på grund af lokalkompakthed). $C = \cup_{i=1}^n K_i$ er kompakt og $D \subseteq C^\circ$, idet $D \subseteq \cup_{i=1}^n K_i^\circ \subseteq (\cup_{i=1}^n K_i)^\circ$. Da gælder, at

$$\mu(D) \leq \tau(C^\circ) \leq \tau_0(C) \leq k_C < \infty.$$

Hvor $\tau(C^\circ) \leq \tau_0(C)$ følger af, at for kompakte mængder C, E med $E \subseteq C^\circ \subseteq C$ er $\tau_0(D) \leq \tau_0(C)$ og så

$$\tau(C^\circ) = \sup\{\tau_0(D) | D \subseteq C^\circ\} \leq \tau_0(C).$$

(iii) Ifølge (iv) i sætning 4.7 og korollar 4.9 følger, at $\mu(C_0) \geq 1$ og dermed påstanden.

(iv) Invariansen af μ nedarves fra invariansen af τ_0 , som er vist i sætning 4.7. □

Hermed har vi bevist eksistensen af et venstre Haar mål på enhver lokalkompakt gruppe.

5 Entydighed af venstre Haar mål

Lemma 5.1. *Antag at X og K er topologiske rum hvor K er kompakt og $f : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert. For hvert $x_0 \in X$ og hvert $\epsilon > 0$ findes $O \in \mathcal{O}(x_0)$ så $|f(x, k) - f(x_0, k)| < \epsilon$ når $x \in O$ og $k \in K$.*

Bevis. Lad $x_0 \in X$ og $\epsilon > 0$ være givne. På grund af f 's kontinuitet er $f^{-1}([f(x_0, k_i) - \epsilon, f(x_0, k_i) + \epsilon])$ åben i $X \times K$ og derfor findes til hvert $k_i \in K$ omegne $O_{k_i}^X \in \mathcal{O}(x_0)$ og $O_{k_i}^K \in \mathcal{O}(k_i)$ så

$$O_{k_i}^X \times O_{k_i}^K \subseteq f^{-1}([f(x_0, k_i) - \epsilon, f(x_0, k_i) + \epsilon]).$$

Derfor er $|f(x, k') - f(x, k_i)| < \epsilon$ når $x \in O_{k_i}^X$ og $k' \in O_{k_i}^K$ og dermed

$$|f(x_0, k') - f(x, k')| \leq |f(x_0, k') - f(x_0, k_i)| + |f(x_0, k_i) - f(x, k')| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \quad (5.1)$$

K kan overdækkes af endelig mange $O_{k_i}^K$ så ovenstående gælder. Som den ønskede omegn vælges tilsvarende $O = \cap_{i=1}^n O_{k_i}^X$. For $(x, k') \in O \times K = (\cap_{i=1}^n O_{k_i}^X) \times (\cup_{i=1}^n O_{k_i}^K)$ vil (5.1) være opfyldt. □

Sætning 5.2. *Lad X og Y være lokalkompakte Hausdorff rum, og lad μ og ν være regulære Borel mål på henholdsvis X og Y . Hvis $f \in C_0(X \times Y)$ så vil*

- (i) snitfunktionerne f_x og f_y tilhøre henholdsvis $C_0(Y)$ og $C_0(X)$,
- (ii) $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \in C_0(X)$ og $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in C_0(Y)$, samt
- (iii) $\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$.

Bevis. (i) Lad $f \in C_0(X \times Y)$. Støtten af f er $K = \text{supp} f$ kompakt. Se på projektionen $K_Y = \pi_Y(K)$ af K på Y , som er kompakt, da projektionen er kontinuert. Snittet f_x er sammensat af $y \mapsto (x, y)$ og f , som begge er kontinuerte, så f_x er kontinuert. K_Y er afsluttet da Y er et Hausdorff rum. $\text{supp} f_x \subseteq K_Y$ thi hvis $y \in \{y \mid f_x(y) \neq 0\}$ vil $0 \neq f_x(y) = f(x, y)$ så $(x, y) \in K$ og derfor $y \in K_Y$. Da K_Y er afsluttet vil $\text{supp} f_x = \overline{\{y \mid f_x(y) \neq 0\}} \subseteq K_Y$. Derfor har f_x kompakt støtte i Y . Ligeså for f_y .

(ii) Ifølge (i) er integralfunktionen

$$I_Y : x \mapsto \int_Y f_x d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

veldefineret. Først vises, at I_Y er kontinuert. Lad $x_0 \in X$ og $\epsilon > 0$. Foregående lemma viser, at der findes $O \in \mathcal{O}(x_0)$ så hvis $x \in O$ vil $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \epsilon$ (da $f : X \times K_Y \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert). Så gælder, at

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_Y} f(x, y) d\nu(y) - \int_{K_Y} f(x_0, y) d\nu(y) \right| &= \left| \int_{K_Y} f(x, y) - f(x_0, y) d\nu(y) \right| \\ &\leq \int_{K_Y} |f(x, y) - f(x_0, y)| d\nu(y) < \epsilon \nu(K_Y). \end{aligned}$$

Deraf følger kontinuiteten. I_Y har samme støtte som f_x , da integralet af en nulfunktion er nul. Det samme ses for den anden integralfunktion. Derfor er de begge kontinuerte med kompakt støtte.

(iii) Ifølge (i) og (ii) er dobbeltintegralerne veldefinerede. I henhold til lemmaet vælges $O_{x_i}^X \in \mathcal{O}(x_i)$ så $|f(x', y) - f(x_i, y)| < \epsilon$ for $x' \in O_{x_i}^X$ og $y \in K_Y$. K_X kan overdækkes af endelig mange af disse $O_{x_i}^X$. Definér disjunkte borelmængder

$$A_i = K_X \cap (O_{x_i} \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} O_{x_j})), \quad A_1 = K_X \cap O_{x_1}.$$

Der gælder, at $K_X \subseteq \cup_{i=1}^n A_i$. Derefter defineres funktionen

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x) f(x_i, y),$$

som er simpel i første variabel. For g gælder

$$\begin{aligned} \iint g(x, y) d\mu(x) d\nu(y) &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \int f(x_i, y) d\nu(y) \\ &= \int \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) f(x_i, y) \right) d\nu(y) = \iint g(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \end{aligned}$$

Både f og g er nul udenfor $K_X \times K_Y$ og idet $A_i \subseteq O_{x_i}^X$ er $|f(x, y) - g(x, y)| < \epsilon$ for alle $(x, y) \in X \times Y$. Derfor gælder

$$\begin{aligned} & \left| \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) - \iint g(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) - \iint g(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \right| < \epsilon \mu(K_X) \nu(K_Y), \\ & \left| \iint f(x, y) d\nu(x) d\mu(y) - \iint g(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \right| < \epsilon \mu(K_X) \nu(K_Y). \end{aligned}$$

Ved trekantsuligheden fås

$$\begin{aligned} & \left| \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) - \iint f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \right| \\ & \leq \left| \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) - \iint g(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \right| \\ & \quad + \left| \iint f(x, y) d\nu(x) d\mu(y) - \iint g(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \right| < 2\epsilon \mu(K_X) \nu(K_Y). \end{aligned}$$

Da ϵ var vilkårlig følger påstanden. $\square$

Lemma 5.3. *Lad $(G, \mathcal{T})$ være en lokalkompakt Hausdorff gruppe og lad μ være et venstre Haarmål på G . Da gælder:*

$$\forall O \in \mathcal{T} : \mu(O) = \sup\{\int f d\mu \mid f \in C_0(G), 0 \leq f \leq 1_O\}.$$

Bevis. Uligheden $\geq$ følger let. For at vise den anden vej, kan vi antage, at $\mu(O) > 0$. Lad $\alpha \in]0, \mu(O)[$. Da μ specielt er et regulært mål findes $K \subseteq O$ kompakt så $\alpha < \mu(K)$. Da G er lokalkompakt, kan vi vælge åben mængde $V \subseteq G$ så $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq O$ med $\overline{V}$ kompakt [3GT sætning 6.14]. Nu vil $\overline{V}$ med delrumstopologien være et normalt rum, idet $\overline{V}$ er kompakt Hausdorff [3GT sætning II.6.12]. Ifølge Urysohns lemma findes en kontinuert funktion $g : \overline{V} \rightarrow [0, 1]$ så $g(K) = \{1\}$ og $g(\overline{V} \setminus V) = \{0\}$. Funktionen kan udvides til hele G ved $g(x) = 0$ for $x \in G \setminus V$. g er så kontinuert på G ifølge Tuborg-lemmaet og derfor er $g \in C_0(G)$ nu fundet så $1_K \leq g \leq 1_O$. Derfor er $\alpha < \mu(K) \leq \int g d\mu$ og dermed $\alpha < \sup\{\int f d\mu \mid f \in C_0(G), 0 \leq f \leq 1_O\}$. Da $\alpha \leq \mu(O)$ var vilkårlig følger den ønskede ulighed. $\square$

Bemærkning 5.4. I beviset er påvist, at $C_0(G)$ har elementer forskellige fra nulfunktionen.

Lemma 5.5. *Lad G være en lokalkompakt gruppe og lad μ være et venstre Haarmål på G . Hvis $O \subseteq G$ er åben og ikke tom, da er $\mu(O) > 0$.*

Bevis. Ifølge definitionen af Haarmål er $\mu \neq 0$ så der findes $K \subseteq G$ kompakt så $\mu(K) > 0$. Lad $O \subseteq G$ være en vilkårlig ikke tom åben mængde. Vælg en endelig overdækning $\cup_{i=1}^n x_i O$ af K . Så er $0 < \mu(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu(x_i O) = n\mu(O)$ og deraf følger påstanden. $\square$

Lemmaet sikrer, at hvis $f : G \rightarrow [0, \infty[$ er kontinuert og μ -integrabel, så er $\int f d\mu > 0$ hvis $f \neq 0$.

Sætning 5.6. *Lad G være en lokalkompakt Hausdorff gruppe, og lad μ og ν være venstre Haarmål på G . Da findes et $c > 0$ så $\nu = c\mu$.*

Bevis. Lad $g \in C_0(G) \setminus \{0\}$ med $g \geq 0$. Og lad $f \in C_0(G)$ være vilkårlig. Idet $\int g d\mu > 0$ kan vi betragte $\frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}$. Denne brøk afhænger ikke af μ . Thi sættes

$$h(x, y) = \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx)d\nu(t)},$$

så vil $h \in C_0(G \times G)$, idet $x \rightarrow \int g(tx)d\nu(t)$ er en strengt positiv kontinuert funktion og støtten af h er $\text{supp} h \subseteq K \times LK^{-1}$, hvor $K = \text{supp} f$ og $L = \text{supp} g$. Så vi har, at

$$\begin{aligned} \int f(x)d\mu(x) &= \iint \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx)d\nu(t)} d\nu(y)d\mu(x) && \text{ses ved udregning} \\ &= \iint \frac{f(y^{-1}x)g(x)}{\int g(ty^{-1}x)d\nu(t)} d\mu(x)d\nu(y) && \text{sætning 5.2 og } x \mapsto y^{-1}x \\ &= \iint \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int g(ty^{-1})d\nu(t)} d\nu(y)d\mu(x) && \text{sætning 5.2 og } y \mapsto xy \\ &= \int g(x)d\mu(x) \int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})d\nu(t)} d\nu(y). \end{aligned}$$

Det viser, at $\frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}$ kun afhænger af f og g og ikke af μ . Derfor er $\frac{\int f d\mu}{\int g d\mu} = \frac{\int f d\nu}{\int g d\nu}$, det vil sige, at $\int f d\nu = c \int f d\mu$ med $c = \frac{\int g d\nu}{\int g d\mu}$. Derfor gælder, at for alle $f \in C_0(G)$ er $\int f d\nu = c \int f d\mu$. Af lemma 5.3 følger nu, at $\nu = c\mu$. $\square$

Vi kan udvide målet til også at gælde for lokalkompakte grupper, der ikke nødvendigvis er Hausdorff.

Sætning 5.7. *Lad G være en lokalkompakt topologisk gruppe og H en afsluttet normal undergruppe af G . Hvis μ er et venstre Haarmål på G/H så defineres ved*

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(\kappa(A)), A \in \mathcal{B}$$

et venstre Haar mål på G .

Bevis. $\tilde{\mu}$ er klart et regulært Borelmål.

De fire resterende egenskaber checkes. (i) og (ii) Hvis K er kompakt er $\kappa(K)$ kompakt, da κ er kontinuert (iii) $\tilde{\mu}$ er ikke nulmålet, da μ ikke er nulmålet. (iv) Da κ er en homomorfi, er $\kappa(xA) = \kappa x \kappa(A)$. Invariansen følger så ved regningen

$$\tilde{\mu}(xA) = \mu(\kappa(xA)) = \mu([x]\kappa(A)) = \mu(\kappa(A)) = \tilde{\mu}(A).$$

$\square$

Det følger, at hvis G er en lokalkompakt gruppe, er $\overline{\{e\}}$ en afsluttet normal undergruppe. Derfor findes et venstre Haar mål på G .

6 Egenskaber ved Haar mål

Proposition 6.1. *Lad G være en lokalkompakt gruppe og lad μ være et mål på G . Ved $\check{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$ defineres et mål på G og der gælder*

- μ er et venstre Haar mål $\iff \check{\mu}$ er et højre Haar mål
- μ er et højre Haar mål $\iff \check{\mu}$ er et venstre Haar mål.

Endvidere gælder

$$\int f d\check{\mu} = \int \check{f} d\mu, \quad f \in \mathcal{L}(G, \mu) \quad (*)$$

hvor $\check{f}(x) = f(x^{-1})$.

Bevis. Da $u \mapsto u^{-1}$ er en homeomorfi gælder, at hvis A er μ -målelig er A^{-1} μ -målelig og dermed er A $\check{\mu}$ -målelig. Samtidig er $(xA)^{-1} = A^{-1}x^{-1}$ så de to første påstande følger deraf. Hvis $f = 1_A$ for A μ -målelig, er $(*)$ opfyldt. Da enhver positiv μ -målelig funktion kan tilnærmes vilkårligt med simple funktioner følger af integralets linearitet og monoton konvergens, at $(*)$ gælder for alle positive μ -målelige funktioner. Derfor gælder påstanden for alle μ -integrable funktioner. $\square$

Korollar 6.2. *På en lokalkompakt gruppe findes et og op til multiplikation med en konstant kun et højre Haar mål.*

Lad G være en lokalkompakt gruppe og lad μ være et venstre Haar mål på G . For $x \in G$ og for $A \in \mathcal{B}$ defineres μ_x ved $\mu_x(A) = \mu(Ax)$, som er veldefineret da $a \mapsto ax$ er en homeomorfi. Det ses, at μ_x er et venstre Haar mål på G , så ifølge entydighedssætningen for venstre Haar mål findes et tal $\Delta(x) \in]0, \infty[$ så $\mu_x = \Delta(x)\mu$ for $x \in G$. Herved defineres en afbildning $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, som kaldes den modulære funktion for G . Denne funktion er veldefineret da den ikke afhænger af μ , thi hvis ν er et andet venstre Haar mål så findes et $c > 0$ så $\nu = c\mu$ og dermed fås $\nu_x = c\mu_x = c\Delta(x)\mu = \Delta(x)\nu$.

Proposition 6.3. *Idet f_x betegner funktionen $g \mapsto f(gx^{-1})$ haves*

$$\int f_x d\mu = \Delta(x) \int f d\mu, \quad f \in \mathcal{L}(G, \mu).$$

Bevis. Da $(1_A(y))_x = 1_A(yx^{-1}) = 1_{Ax}(y)$ gælder, at

$$\int (1_A)_x d\mu = \int 1_{Ax} d\mu = \mu(Ax) = \Delta(x)\mu(A).$$

Da enhver positiv målelig funktion kan tilnærmes vilkårligt med simple funktioner følger påstanden nu ved integralets linearitet og Lebesgues monotonisætning. $\square$

Korollar 6.4. *Den modulære funktion $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ for en lokalkompakt gruppe er en kontinuert homomorfi.*

Bevis. For $x, y \in G$ og $A \in \mathcal{B}$ med $\mu(A) \neq 0$ gælder

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A),$$

hvorfor Δ er en homomorfi. Vi viser nu, at den modulære funktion er kontinuert. Da $C_0(G)$ er tæt i $\mathcal{L}_1(G, \mu)$ er det nok, at betragte funktioner i $C_0(G)$. Lad $f \in C_0(G)$ være forskellig fra nulfunktionen så er $\int f d\mu > 0$. Ifølge foregående proposition er $\Delta(x) = \frac{\int f_x d\mu}{\int f d\mu}$ for $x \in G$. Lad $x \in G$ være vilkårlig og lad $(x_\lambda) \subseteq G$ være et vilkårligt net, der konvergerer mod x . Da vil $f_{x_\lambda} \rightarrow f_x$ i C_0 udstyret med $\mathcal{L}_1$ -normen, thi for vilkårligt $\epsilon > 0$ er $|f_{x_\lambda}(g) - f_x(g)| = |f(gx_\lambda^{-1}) - f(gx^{-1})| < \epsilon$ for alle $g \in G$ fra et vist trin (f er uniformt kontinuert, idet f har kompakt støtte) og så gælder, at

$$\|f_{x_\lambda} - f_x\| = \int_G |f_{x_\lambda}(g) - f_x(g)| d\mu \leq \int_K \epsilon d\mu = \mu(K)\epsilon,$$

hvor f har støtte i den kompakte mængde K . Da ϵ var vilkårlig følger, at $f_{x_\lambda} \rightarrow f_x$ i $\mathcal{L}_1$ -norm. Da integralet er kontinuert vil $\int f_{x_\lambda} d\mu \rightarrow \int f_x d\mu$ og derfor $\Delta(x_\lambda) \rightarrow \Delta(x)$. Altså er den modulære funktion kontinuert. $\square$

Proposition 6.5. *Lad G være lokalkompakt og lad μ være et venstre Haar mål. Da er*

$$\int f(x^{-1}) d\mu(x) = \int f(x) \Delta(x^{-1}) d\mu(x), \quad f \in \mathcal{L}(G, \mu).$$

Bevis. Lad $\nu = \frac{1}{\Delta} \mu$ være målet med tæthed $\frac{1}{\Delta}$ med hensyn til μ og lad $\sigma(A) = \mu(i^{-1}(A))$, hvor $i : x \mapsto x^{-1}$ (skrives også $\sigma = i(\mu)$). Så er ν og σ højre Haar mål. Det eneste problem er at checke iv:

$$\begin{aligned} \sigma(Ax) &= \mu(x^{-1}A^{-1}) = \mu(A^{-1}) = \sigma(A) \\ \nu(Ax) &= \int 1_{Ax}(y) d\nu(y) = \int 1_{Ax}(y) \Delta(y)^{-1} d\mu(y) \\ &= \Delta(x)^{-1} \int 1_A(yx^{-1}) \Delta(x) \Delta(y)^{-1} d\mu(y) = \Delta(x)^{-1} \int 1_A(yx^{-1}) \Delta(yx^{-1})^{-1} d\mu(y) \\ &= \Delta(x)^{-1} \Delta(x) \int 1_A(y) \Delta(y)^{-1} d\mu(y) = \int 1_A(y) d\nu(y) = \nu(A), \end{aligned}$$

hvor proposition 6.3 er benyttet i tredjesidste trin. Ved entydigheden af højre Haar mål findes $c > 0$ så $\nu = c\sigma$. Her er $c = 1$, hvilket følger af følgende: Lad K være en kompakt symmetrisk omegn af e , så er

$$\begin{aligned} 0 &= c\sigma(K) - \nu(K) = \int 1_K(x) (c - \Delta(x)^{-1}) d\mu(x) = \int_K c - \Delta(x)^{-1} d\mu(x) \\ &= \int_K c - 1 d\mu(x) - \int_K \Delta(x)^{-1} - 1 d\mu(x) = \mu(K)(c - 1) - \int_K \Delta(x)^{-1} - 1 d\mu(x). \end{aligned}$$

Da K er kompakt er $\mu(K) > 0$, og derfor er

$$c - 1 = \frac{1}{\mu(K)} \int_K \Delta(x)^{-1} - 1 d\mu(x).$$

Da den modulære funktion er kontinuert, kan ifølge bemærkning 3.6 til hvert $\epsilon > 0$ vælges $K \in \mathcal{U}(e)$ kompakt og symmetrisk, så $|\Delta(x)^{-1} - 1| < \epsilon$ for $x \in K$. Så vil

$$|c - 1| = \left| \frac{1}{\mu(K)} \int_K \Delta(x)^{-1} - 1 d\mu(x) \right| \leq \frac{1}{\mu(K)} \int_K |\Delta(x)^{-1} - 1| d\mu(x) \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ var vilkårlig, må $c = 1$. Det kan så konkluderes, at $\nu = \sigma$. Hvis $f \in \mathcal{L}(\mu)$ fås

$$\int f d\nu = \int f d\sigma = \int f \circ id \mu = \int f(x^{-1}) d\mu(x)$$

og

$$\int f d\nu = \int f \Delta^{-1} d\mu = \int f(x) \Delta(x^{-1}) d\mu(x),$$

og påstanden er bevist. $\square$

Definition 6.6. En lokalkompakt gruppe G kaldes unimodulær hvis $\Delta(x) = 1$ for alle $x \in G$.

Proposition 6.7. En lokalkompakt gruppe er unimodulær netop hvis der eksisterer et Haarmål på G .

Bevis. Følger umiddelbart af definitionen af Δ . $\square$

Eksempel 6.8.

- (i) Enhver abelske gruppe er unimodulær, thi $\mu(A) = \mu(xA) = \mu(Ax) = \Delta(x)\mu(A)$.
- (ii) Hvis kommutatorgruppen G' er tæt i G så er G unimodulær. For da Δ er kontinuert, er det nok at vise, at $\Delta(G') = \{1\}$. Men det følger af, at den modulære funktion er en homomorfi
$$\Delta(xyx^{-1}y^{-1}) = \Delta(x)\Delta(y)\Delta(x)^{-1}\Delta(y)^{-1} = 1.$$
- (iii) Hvis G er kompakt så er G unimodulær. Thi da Δ er en kontinuert homomorfi er $\Delta(G)$ en kompakt undergruppe af $\mathbb{R}_+^*$. Og påstanden følger af, at den eneste kompakte undergruppe af $\mathbb{R}_+^*$ er $\{1\}$. Der findes derfor et Haar mål μ på G . Da $\mu(G) < \infty$ kan målet normeres til et mål ν med $\nu(G) = 1$.
- (iv) Lad G være udstyret med et venstre Haar mål μ . Hvis der findes $C \in \mathcal{U}(e)$ som er invariant under alle automorfier, det vil sige $C = xCx^{-1}$ for alle $x \in G$, så er G unimodulær. Dette følger af, at for alle $x \in G$ gælder:

$$\mu(C) = \mu(xCx^{-1}) = \Delta(x)^{-1}\mu(xC) = \Delta(x)^{-1}\mu(C).$$

Så $\forall x \in G : \Delta(x) = 1$, idet $\mu(C) > 0$ ifølge lemma 5.3.

Proposition 6.9. Lad G være en lokalkompakt gruppe og μ et venstre Haarmål på G . Da er G unimodulær hvis og kun hvis μ er inversinvariant, det vil sige at $\mu(A) = \mu(A^{-1})$ for $A \in \mathcal{B}$.

Bevis. Ifølge beviset for proposition 6.5 er $\frac{1}{\Delta}\mu = i(\mu)$ og derfor gælder, at

$$\mu = i(\mu) \Leftrightarrow \Delta = 1 \Leftrightarrow G \text{ er unimodulær.}$$

$\square$

For unimodulære grupper gælder altså, at $\forall \psi \in \mathcal{L}(\mu) : \int \psi(x^{-1}) d\mu(x) = \int \psi(x) d\mu(x)$.

7 Eksempler på Haar mål

I dette afsnit får vi brug for følgende sætning.

Sætning 7.1. *Lad G være en lokalkompakt Hausdorff gruppe, der er homeomorf til en åben delmængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Lad ϕ være en homeomorfi af G på U .*

- (i) *Hvis funktionen $u \mapsto \phi(g\phi^{-1}(u))$ er restriktion til U af en affin afbildning $L_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (affin betyder at $L_a(u) = A_g u + b$ med $A_g \in GL(n, \mathbb{R})$ og $b \in \mathbb{R}^n$) for alle $g \in G$, så er*

$$\mu(A) = \int_{\phi(A)} \frac{1}{|\det L_{\phi^{-1}(u)}|} dm(u)$$

et venstre Haarmål på G (m betegner Lebesgue målet).

- (ii) *Hvis funktionen $u \mapsto \phi(\phi^{-1}(u)g)$ er restriktion til U af en affin afbildning $R_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for alle $g \in G$, så er*

$$\mu(A) = \int_{\phi(A)} \frac{1}{|\det L_{\phi^{-1}(u)}|} dm(u)$$

et højre Haarmål på G .

Bevis. De to påstande kan vises på præcis samme måde, så vi restringerer os til at vise forskriften for det venstre Haar mål.

Integralet er veldefineret, for da $\phi(g\phi^{-1}(u)) = L_a|_U$ er en homeomorfi, er $\det L_{\phi^{-1}(u)} \neq 0$ for alle $u \in U$. Hvis $A \in \mathcal{B}(G)$ vil $\phi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ og desuden er determinanten en kontinuert afbildning. Altså er $|\det L_{\phi^{-1}(u)}|^{-1}$ kontinuert og derfor målelig. Derfor har det mening at tale om $\mu(A)$ som foreskrevet.

Enhver kompakt mængde er μ -målelig, da den kompakte mængde er afsluttet (kompakt i Hausdorff gruppen G) og derfor indeholdt i Borelalgebraen.

Hvis C er kompakt er integralet endeligt, på grund af kontinuiteten af integranden, samt at $\phi(C)$ er kompakt (afsluttet og begrænset).

Målet er ikke nulmålet, for integranden er positiv og der integreres med hensyn til Lebesguemålet.

Målet er et regulært Borelmål, da Lebesguemålet er regulært.

Vi mangler blot at vise venstre-invariansen.

$$\begin{aligned} \mu(xA) &= \int_{\phi(xA)} \frac{1}{|\det L_{\phi^{-1}(u)}|} dm(u) && \text{substitution } u \mapsto \phi(x\phi^{-1}(u)) \text{ og kæderegel} \\ &= \int_{\phi(A)} \frac{|\det L_x|}{|\det L_{x\phi^{-1}(u)}|} dm(u) && \text{benyt at } \det L_{xy} = \det L_x \det L_y \\ &= \int_{\phi(A)} \frac{1}{|\det L_{\phi^{-1}(u)}|} dm(u) \end{aligned}$$

Først er benyttet substitutionen $u \mapsto \phi(x\phi^{-1}(u))$, som er restriktionen af en affin afbildning L_x , og kædereglens [3MI], idet Jacobi matricen for afbildningen L_x netop er matricen A_x . Determinanten for denne er netop den vi skriver som $\det L_x$. Derefter benyttes, at

$$\det L_{xy} = \det L_x \det L_y,$$

thi for $u \in U$ er $L_x L_y u = \phi(x\phi^{-1}(\phi(y\phi^{-1}(u)))) = \phi(xy\phi^{-1}(u)) = L_{xy}u$, og da matricerne A_x, A_y, A_{xy} er entydigt bestemte, er $\det L_{xy} = \det L_x \det L_y$. $\square$

Haarmålet for $GL(n, \mathbb{R})$

Topologien på $GL(n, \mathbb{R})$ er den, vi har diskutteret tidligere.

Først vil vi behandle specialtilfældet $GL(2, \mathbb{R})$. Lad $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$. Definér $\phi : GL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ ved

$$\phi \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

så er ϕ en homeomorfi af $GL(2, \mathbb{R})$ på en åben delmængde U af $\mathbb{R}^4$ ($U = \mathbb{R}^4 \setminus \ker(\det)$ og determinanten er en kontinuert afbildning, idet den er sammensat af multiplikation og addition, så kernen er afsluttet). Med

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

er

$$\begin{aligned} \phi(a\phi^{-1}(u)) &= \phi \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{pmatrix} \right) = \phi \begin{pmatrix} a_1 u_1 + a_2 u_2 & a_1 u_3 + a_2 u_4 \\ a_3 u_1 + a_4 u_2 & a_3 u_3 + a_4 u_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 u_1 + a_2 u_2 \\ a_1 u_3 + a_2 u_4 \\ a_3 u_1 + a_4 u_2 \\ a_3 u_3 + a_4 u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Altså er $u \mapsto \phi(a\phi^{-1}(u))$ restriktionen af den lineære afbildning $L_a : u \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} u$ (bemærk notation med submatricer) og $|\det L_a| = (\det a)^2$. Så ifølge eksemplet ovenfor er $\mu = fm$ et venstre Haar mål på $GL(2, \mathbb{R})$, hvor m er Lebesgue målet og $f(x) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}^{-2}$ med $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. På tilsvarende vis findes et højre Haar mål på $GL(2, \mathbb{R})$. Med den samme homeomorfi ϕ er

$$\phi(\phi^{-1}(u)a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ a_2 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Derfor er $\phi(\phi^{-1}(u)a)$ restriktionen af en lineær afbildning R_a med $|\det R_a| = (\det a)^2$. Altså er $\mu = fm$ fra før også et højre Haar mål. Deraf ses, at $GL(2, \mathbb{R})$ er unimodulær.

Med ovenstående i tankerne, kan vi finde et Haar mål på $GL(n, \mathbb{R})$. Lad $a \in GL(n, \mathbb{R})$ og homeomorfien $\phi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ (U er åben) være givet ved

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \phi(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{hvor} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

hvor vi har identificeret $\mathbb{R}^{n^2}$ med $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$. Lad $u \in \mathbb{R}^{n^2}$ være givet ved

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \text{hvor} \quad u_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix},$$

så er

$$\begin{aligned} \phi(a\phi^{-1}(u)) &= \phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \sum_i a_{1i}u_{i1} & \dots & \sum_i a_{1i}u_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_i a_{ni}u_{i1} & \dots & \sum_i a_{ni}u_{in} \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i}u_{i1} \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni}u_{i1} \\ \vdots \\ \sum_i a_{1i}u_{in} \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni}u_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Så $u \mapsto \phi(a\phi^{-1}(u))$ er restriktion af den lineære afbildning

$$L_a : u \mapsto \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} u,$$

og $|\det L_a| = |(\det a)^n| = |\det a|^n$. Derfor er målet μ defineret ved $\mu = fm$ med

$$f\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \right\|^{-n} \quad \text{et venstre Haar mål på } GL(n, \mathbb{R}).$$

Det ses, at

$$\phi(\phi^{-1}(u)g) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{11} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a_{n1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n1} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{1n} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{1n} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a_{nn} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

svarende til en lineær afbildning R_a . Determinanten for denne matrix er den samme som for matrixen for L_a . Dette skyldes, at determinantens numeriske værdi ikke ændres, selvom matrixens rækker og søjler ombyttes eller hvis matrixen transponeres [1LA, Thm. 7.4, 7.10]. Her en kort skitse over de trin ($|\det|$ -bevarende), der fører matrixen for R_a over i matrixen for L_a . Først rækkeombytning, derefter tilsvarende søjleombytning og

sidst transposition

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{11} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n1} \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \\
& \left(\begin{pmatrix} a_{1n} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{1n} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{nn} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{1n} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{n1} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \right) \\
& \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{11} & \dots & a_{n1} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Altså fås, at højre og venstre Haar mål på $GL(n, \mathbb{R})$ er ens og derfor er gruppen unimodulær.

Haar målet på $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \right\}$

Definer den surjektive homeomorfi $\phi : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ ved $\phi \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Da

$$\phi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = \phi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

følger at $d\mu \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^{-2} dx dy$ er et venstre Haar mål på G . Idet

$$\phi \left(\phi^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

er $d\mu \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |x|^{-1} dx dy$ et højre Haar mål på G . Det følger altså, at G ikke er unimodulær. Da G er en undergruppe af $GL(2, \mathbb{R})$ haves et eksempel på en unimodulær gruppe med en ikke unimodulær undergruppe.

8 Repræsentationsteori

I det følgende betegner G en lokalkompakt unimodulær gruppe, og H er et separabel Hilbertrum over $\mathbb{C}$.

Definition 8.1. Ved en repræsentation af G på H forstås en homomorfi T fra G ind i $\mathcal{B}(H)^* = \{S \in \mathcal{B}(H) \mid S \text{ er invertibel}\}$. Det bemærkes, at $\mathcal{B}(H)^*$ er en gruppe.

- Repræsentationen T kaldes kontinuert såfremt afbildningen $(u, x) \mapsto T(x)u$ fra $H \times G$ ind i H er kontinuert.
- Repræsentationen T kaldes unitær, hvis $\forall x \in G : T(x)$ er unitær.
- Ved dimensionen, $\dim T$, af en repræsentation T forstås dimensionen af H . Hvis H er uendeligdimensionelt sættes $\dim T = \infty$.

Eksempel 8.2. Lad $G = (\mathbb{R}, +)$ og $H = \mathbb{C}$, det vil sige $\mathcal{B}(H)^* = \mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Som bekendt er $(\mathbb{R}, +)$ en lokalkompakt unimodulær gruppe.

(a)

$$\begin{aligned} T_1(x) &= e^{kx}, k \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \\ T_2(x) &= e^{ikx}, k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Her er både T_1 og T_2 klart en-dimensionale kontinuerte repræsentationer af $\mathbb{R}$ på $\mathbb{C}$. Da $T_2(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$ er $T_2(x)$ en isometri og derfor er T_2 unitær [2AN, sætning II.6.2]. Man kan vise, at de eneste en-dimensionale kontinuerte repræsentationer af G på $\mathbb{C}$ er af formen T_1 . Dermed er de eneste en-dimensionale kontinuerte unitære repræsentationer af G af formen T_2 .

(b) Lad os angive en diskontinuert unitær repræsentation af G . Lad $\{\xi_\alpha\}$ være en Hamel basis for $\mathbb{R}$ [3GT, p. I.1.30] med $\xi_{\alpha_0} = 1$. Lad ξ_{α_1} være et andet basiselement, så er $\xi_{\alpha_1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Definér T ved $T(x) = e^{ir_{\alpha_1}x}$, hvor $x = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha \xi_\alpha$, så er T en unitær repræsentation af G og da $T(q) = 1$ for alle $q \in \mathbb{Q}$ og $T(\xi_{\alpha_1}) = e^i \neq 1$ følger, at T er diskontinuert ($\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$).

Definition 8.3. Lad T være en repræsentation af G på H . Et underrum V af H kaldes T -invariant, hvis $\forall x \in G \forall v \in V : T(x)v \in V$. T kaldes (topologisk) irreducibel, hvis de eneste afsluttede T -invariante underrum er $\{0\}$ og H . Hvis H har et ægte (ikke trivielt) T -invariant afsluttet underrum V , kaldes T reducibel.

Det bemærkes, at hvis $\dim T = 1$ er T irreducibel, da de eneste underrum er trivielle. Hvis T er en reducibel repræsentation, med V som et ægte afsluttet T -invariant underrum, induceres en repræsentation T_V af G på V ved $T_V(x) = T(x)|_V$, altså $T_V(x)v = T(x)v$ for $x \in G$ og $v \in V$. Denne repræsentation kaldes delrepræsentationen af T på V .

Proposition 8.4. Lad T være en unitær repræsentation og lad V være et afsluttet underrum af H . Da gælder, at

$$V \text{ er } T\text{-invariant} \iff V^\perp \text{ er } T\text{-invariant}.$$

Bevis. Antag, at V er T -invariant og lad $u \in V, v \in V^\perp$ samt $x \in G$. Da er $(T(x)v, u) = (v, T(x)^*u) = (v, T(x^{-1})u) = 0$ da $T(x^{-1})u \in V$. Altså er $V^\perp$ et T -invariant underrum. Idet $V = (V^\perp)^\perp$ følger den anden implikation. $\square$

Definition 8.5. En repræsentation T af G på H siges at være en direkte sum af repræsentationerne T_i af G på H_i , hvis H_i er afsluttede T -invariante underrum af H så $H = \oplus_{i \in I} H_i$ og $\forall i \in I : T_i = T|_{H_i}$. I så fald skrives $T = \oplus_{i \in I} T_i$. T kaldes fuldstændig reducibel, hvis T kan skrives $T = \oplus_{i \in I} T_i$ med T_i irreducible delrepræsentationer for alle $i \in I$.

Korollar 8.6. En unitær endelig-dimensional repræsentation T af G er fuldstændig reducibel.

Bevis. Hvis T er irreducibel er dette klart. Hvis T ikke er irreducibel findes et ægte afsluttet T -invariant underrum H_1 . Proposition 8.4 giver $H_1^\perp$ også er T -invariant og $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. Hvis T_{H_1} og $T_{H_1^\perp}$ er irreducible er vi færdige ellers fortsættes. Da $\dim T < \infty$ er denne proces endelig, og slutter derfor med en sum af irreducible repræsentationer. underrum H_1 . $\square$

Definition 8.7. En operator S siges at kommutere med en repræsentation T på G , hvis $\forall g \in G : T(g)S = ST(g)$.

Lemma 8.8. Lad T være en unitær repræsentation af G . Hvis operatoren S kommuterer med T så kommuterer den adjungerede operator S^* også med T .

Bevis. Antag at S kommuterer med T . Da er $T(g^{-1})S = ST(g^{-1})$ for alle $g \in G$. Da den adjungerede operator er entydig, er $S^*T(g^{-1})^* = (T(g^{-1})S)^* = (ST(g^{-1}))^* = T(g^{-1})^*S^*$. Og da T er en unitær repræsentation, står der $S^*T(g) = S^*T(g^{-1})^{-1} = T(g^{-1})^{-1}S^* = T(g)S^*$. $\square$

Sætning 8.9 (Schurs Lemma). Lad G være en lokalkompakt unimodulær gruppe og lad (T, H) være en topologisk irreducibel repræsentation af G . Hvis $S : H \rightarrow H$ er en begrænset kompakt operator, som kommuterer med T , så er $S = \mu I$ for et $\mu \in \mathbb{C}$.

Bevis. Først viser vi påstanden i tilfældet, hvor $S \neq 0$ er kommuterer med T samt er begrænset, kompakt og selvadjungeret; så er S normal ($S^*S = SS^*$). Ved [3AN, thm. 3.6] har S mindst én egen værdi. Vælg en egen værdi $\lambda \neq 0$. $\ker(S - \lambda I)$ er forskellig fra $\{0\}$, da λ er egen værdi, og afsluttet, idet S er begrænset og dermed kontinuert [3AN]. Kernen er T -invariant, thi hvis $u \in \ker(S - \lambda I)$ og $g \in G$ er vilkårlige, vil

$$(S - \lambda I)T(g)u = ST(g)u - \lambda IT(g)u = T(g)(Su) - T(g)(\lambda u) = T(g)(Su - \lambda u) = 0$$

Da T er topologisk irreducibel er $\ker(S - \lambda I) = H$. Derfor er $Sx = \lambda x$ for alle $x \in H$. Påstanden følger deraf.

Lad generelt $S \neq 0$ kommutere og være en begrænset og kompakt operator. S kan skrives

$$S = \frac{1}{2}(S + S^*) - \frac{i}{2}(iS - iS^*),$$

altså som en sum af selvadjungerede operatorer $S + S^*$ og $iS - iS^*$. Disse operatorer er tilmed kompakte ([3AN] S kompakt giver S^* kompakt) og kommuterer med T ifølge ovenstående lemma. Ifølge det før viste, gælder så, at

$$S = \frac{1}{2}(S + S^*) - \frac{i}{2}(iS - iS^*) = \mu_1 I + \mu_2 I = \mu I, \mu \in \mathbb{C}$$

Dermed er Schurs lemma bevist. $\square$

9 Repræsentationsteori for kompakte grupper

I det følgende betegner G en kompakt gruppe; der findes så et Haar mål på μ på G med $\mu(G) = 1$. Lad H være et separabelt Hilbert rum over $\mathbb{C}$. Alle repræsentationer antages at være kontinuerte.

Sætning 9.1. Antag at (T, H) er en repræsentation af G . Da findes et indre produkt på H så T er en unitær kontinuert repræsentation. Endvidere er det nye indre produkt (norm-) ækvivalent med det oprindelige.

Bevis. Lad $T : G \rightarrow \mathcal{B}(H)$ være givet og lad $(\cdot, \cdot)$ betegne det oprindelige indre produkt på H . For faste $u, v \in H$ betragtes afbildningen $g \mapsto (T(g)u, T(g)v)$ fra G ind i $\mathbb{C}$. Denne afbildning er kontinuert og da G er kompakt er den også integrabel. Det har derfor mening, at definere det nye indre produkt ved

$$\langle u, v \rangle = \int_G (T(g)u, T(g)v) d\mu(g), \quad u, v \in G.$$

Dette er et indre produkt, idet det tydeligvis er lineær i første variabel og

$$\langle u, v \rangle = \int_G (T(g)u, T(g)v) d\mu(g) = \int_G \overline{(T(g)v, T(g)u)} d\mu(g) = \overline{\langle v, u \rangle}.$$

Hvis $u \neq 0$ er $(T(g)u, T(g)u) \geq 0$ for alle $g \in G$ og for $g = e$ er $(T(e)u, T(e)u) = (u, u) > 0$. Så da $g \mapsto (T(g)u, T(g)v)$ er kontinuert er $\langle u, u \rangle = \int_G (T(g)u, T(g)u) d\mu(g) > 0$.

T er unitær med hensyn til dette indre produkt, idet for $h \in G$ er

$$\begin{aligned} \langle T(h)u, T(h)v \rangle &= \int_G (T(g)T(h)u, T(g)T(h)v) d\mu(g) = \int_G (T(gh)u, T(gh)v) d\mu(g) \\ &= \int_G (T(g)u, T(g)v) d\mu(g) = \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

hvor det i næstsidste trin er benyttet, at μ er invariant.

At T er kontinuert med hensyn til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ følger af, at de to indre produkter er normækvivalente [2AN]:

Lad $\|u\|_1^2 = (u, u)$ og $\|u\|_2^2 = \langle u, u \rangle$. Vi har at

$$\|u\|_2^2 = \int_G (T(g)u, T(g)u) d\mu(g) \leq (\sup_{g \in G} \|T(g)\|)^2 \int_G (u, u) d\mu(g) = N^2(u, u) = N^2\|u\|_1^2.$$

Her er $N = \sup_{g \in G} \|T(g)\| < \infty$, ifølge Banach-Steinhaus sætning [3AN, U3.1], idet $\forall u \in H : \sup_{g \in G} \|T(g)u\|_1 < \infty$. Af

$$\|u\|_1^2 = (T(g^{-1})T(g)u, T(g^{-1})T(g)u) \leq (\sup_{g \in G} \|T(g)\|)^2 (T(g)u, T(g)u) = N^2\|T(g)u\|_1^2,$$

følger at

$$\|u\|_1^2 = \int_G (u, u) d\mu(g) \leq N^2 \int_G (T(g)u, T(g)u) d\mu(g) = N^2\|u\|_2^2.$$

Det ses, at $N^{-1}\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq N\|u\|_1$, så de to normer er ækvivalente. $\square$

Sætningen siger, at når vi betragter kontinuerte repræsentationer af kompakte grupper, kan vi uden indskrænkning antage, at disse er unitære.

Før vi går igang med hovedsætningerne for kompakte grupper, er vi nødt til at udvide integralbegrebet. Vi ønsker at definere integralet for kontinuerte funktioner $\phi : G \rightarrow H$. Hertil bemærkes, at $\ell : v \mapsto \int_G (v, \phi(x)) d\mu(x)$ definerer en lineær funktional på H ; denne er tillige kontinuert, da

$$|\ell(v)| \leq \int_G |(v, \phi(x))| d\mu(x) \leq \int_G \|v\| \|\phi(x)\| d\mu(x) \leq \|v\| \sup_{x \in G} \|\phi(x)\|,$$

hvor det normerede mål er benyttet, samt at $\sup_{x \in G} \|\phi(x)\| < \infty$ fordi ϕ er kontinuert og G er kompakt. Ifølge Riesz' sætning [2AN] eksisterer en entydig vektor $\xi \in H$ så $\forall u \in H : (u, \xi) = \ell(u)$. Vi definerer integralet som dette ξ

$$\int_G \phi(g) d\mu(g) = \xi$$

Følgende egenskaber noteres for integralet:

- (i) $\int (\psi + \phi) d\mu = \int \psi d\mu + \int \phi d\mu$,
- (ii) $\int \phi(g) d\mu(g) = \int \phi(gh) d\mu(g) = \int \phi(hg) d\mu(g) = \int \phi(g^{-1}) d\mu(g)$ for $h \in G$,
- (iii) $\|\int \phi d\mu\| \leq \int \|\phi\| d\mu$ og
- (iv) For en begrænset operator, $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, mellem to Hilbertrum H_1 og H_2 , gælder

$$S \int \phi d\mu = \int S\phi d\mu.$$

De to første påstande er oplagte. Den tredje indses ved at $\|\xi\| = \|\ell\|$, ifølge Riesz sætning, og regningen

$$\begin{aligned} \|\int \phi d\mu\| &= \sup\{| \int (v, \phi(x)) d\mu(x) | \mid \|v\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\int \|v\| \|\phi(x)\| d\mu(x) \mid \|v\| \leq 1\} = \int \|\phi\| d\mu. \end{aligned}$$

For vilkårligt $v \in H_2$ haves

$$(v, S \int \phi d\mu) = (S^* v, \int \phi d\mu) = \int (S^* v, \phi(g)) d\mu(g) = \int (v, S\phi(g)) d\mu(g) = (v, \int S\phi d\mu).$$

Hermed er fjerde påstand påvist. Denne giver følgende egenskaber

- Med $H_1 = H_2$ og $S = \lambda I$ for $\lambda \in \mathbb{C}$ er $\lambda \int \phi d\mu = \int \lambda \phi d\mu$. Dermed er vist, at det definerede integral er lineært.
- Med $H_2 = \mathbb{C}$ og $S = (\cdot, u)$ for $u \in H_1$ er $(\int \phi d\mu, u) = \int (\phi(x), u) d\mu$.

Lemma 9.2. *Lad (T, H) være en unitær repræsentation af G . Afbildningen $K : H \rightarrow \text{End}(H)$ givet ved*

$$K(u)v = \int_G (v, T(x)u) T(x)u d\mu(x), \quad u, v \in H$$

har følgende egenskaber

- (i) $\forall u \in H$ er $K(u)$ en selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator,
- (ii) $\forall u \in H \forall y \in G$ er $K(u)T(y) = T(y)K(u)$ og
- (iii) ethvert egenrum E_λ til en egenværdi λ for $K(u)$ er T -invariant, $u \in H$.

Bevis. (i) Idet

$$\begin{aligned}
\|K(u)v\| &\leq \int_G |(v, T(x)u)| \|T(x)u\| d\mu(x) \leq \int_G \|v\| \|T(x)u\|^2 d\mu(x) \\
&= \int_G \|v\| \|u\|^2 d\mu(x) \quad \text{idet } T(x) \text{ er unitær og derfor isometrisk [2AN]} \\
&= \|v\| \|u\|^2, \quad v \in H,
\end{aligned}$$

er $K(u)$ begrænset. Da vi for alle $v, w \in H$ har at

$$\begin{aligned}
(K(u)v, w) &= \int (v, T(x)u)(T(x)u, w) d\mu(x) = \int \overline{(w, T(x)u)} (v, T(x)u) d\mu(x) \\
&= (v, \int (w, T(x)u) T(x)u d\mu(x)) = (v, K(u)w)
\end{aligned}$$

er $K(u) = K(u)^*$. Lad $(e_i)_{i \in I}$ være en vilkårlig ortonormalbasis for H . Så er

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \|K(u)e_i\|^2 &= \sum_{i \in I} (K(u)e_i, K(u)e_i) = \sum_{i \in I} \int_G (e_i, T(x)u)(T(x)u, K(u)e_i) d\mu(x) \\
&= \sum_{i \in I} \iint_G (e_i, T(x)u) \overline{(T(y)u, T(x)u)} (e_i, T(y)u) d\mu(y) d\mu(x) \\
&\stackrel{1.}{=} \iint_G \sum_{i \in I} (T(y)u, e_i)(e_i, T(x)u)(T(x)u, T(y)u) d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \iint_G \left(\sum_{i \in I} (T(y)u, e_i) e_i, T(x)u \right) (T(x)u, T(y)u) d\mu(y) d\mu(x) \\
&\stackrel{2.}{=} \iint_G (T(y)u, T(x)u)(T(x)u, T(y)u) d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \iint_G |(T(x)u, T(y)u)|^2 d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leq \iint_G \|T(x)u\|^2 \|T(y)u\|^2 d\mu(y) d\mu(x) = \|u\|^4 < \infty,
\end{aligned}$$

idet $T(x)$ er isometrisk. Altså er $K(u)$ en selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator. Undervejs er følgende benyttet:

1.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in I} |(e_i, T(x)u)(T(x)u, T(y)u)(T(y)u, e_i)| \\
&\leq |T(x)u, T(y)u| \left(\sum_{i \in I} |(e_i, T(x)u)|^2 \sum_{j \in I} |(e_j, T(y)u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ved Hölders ulighed} \\
&= |(T(x)u, T(y)u)| \|T(x)u\| \|T(y)u\| \quad \text{ved Parseval ligning} \\
&= \|u\|^4 < \infty
\end{aligned}$$

Derfor følger af Lebesgues majorantsætning, at vi kan ombytte sum og integral. Hölders ulighed og Parsevals ligning stammer fra 2AN.

2. Ortonormaludviklingen.

(ii) For vilkårlige $u \in H$ og $y \in G$ gives

$$\begin{aligned}
T(y)K(u)v &= T(y) \int_G (v, T(x)u)T(x)ud\mu(x) = \int_G (v, T(x)u)T(y)T(x)ud\mu(x) \\
&= \int_G (T(y)v, T(yx)u)T(yx)ud\mu(x) \quad \text{idet } T \text{ er unitær og en homomorfi} \\
&= \int_G (T(y)v, T(x)u)T(x)ud\mu(x) \quad \mu \text{ er invariant} \\
&= K(u)T(y)v, \quad v \in H
\end{aligned}$$

Det vil sige, at $K(u)$ kommuterer med T for alle $u \in H$.

(iii) Antag $\lambda \in \mathbb{C}$ er en egenverdi for $K(u)$ og lad E_λ være det tilhørende egenrum. Hvis $v \in E_\lambda$ og $y \in G$ er vilkårlige så er

$$K(u)T(y)v = T(y)K(u)v = T(y)\lambda v = \lambda T(y)v.$$

Det vil sige, at $T(y)v \in E_\lambda$, hvorfor E_λ er T -invariant. □

Operatoren $K(u)$ kaldes Weyl-operatoren.

Sætning 9.3 (Peter-Weyl). *Enhver irreducibel unitær repræsentation (T, H) af G er endelig dimensional.*

Bevis. Lad $K(u)$ være Weyl-operatoren til T . Ifølge lemma 9.2(ii) vil $K(u)T(y) = T(y)K(u)$ for alle $u \in H, y \in G$. Så ifølge Schurs lemma er $K(u) = \alpha(u)I$, hvor $\alpha(u) \in \mathbb{C}$. Altså er

$$\alpha(u)(v, v) = (K(u)v, v) = \int_G (v, T(x)u)(T(x)u, v)d\mu(x).$$

Det vil sige, at

$$\alpha(u)\|v\|^2 = \int_G |(T(x)u, v)|^2 d\mu(x). \quad (9.1)$$

Ombyt v og u i (9.1):

$$\begin{aligned}
\alpha(v)\|u\|^2 &= \int_G |(T(x)v, u)|^2 d\mu(x) \\
&= \int_G |(v, T(x^{-1})u)|^2 d\mu(x) \quad T \text{ unitær, så } T(x)^* = T(x)^{-1} = T(x^{-1}) \\
&= \int_G |(T(x^{-1})u, v)|^2 d\mu(x) = \int_G |T(x)u, v|^2 d\mu(x) \quad \text{ved Proposition 6.5} \\
&= \alpha(u)\|v\|^2.
\end{aligned}$$

Altså er $\alpha(u) = c\|u\|^2$ for $u \in H$, hvor c er en positiv konstant. Thi med $\|u\| = 1$ og $u = v$ giver (9.1):

$$\int_G |(T(x)u, u)|^2 d\mu(x) = \alpha(u)\|u\|^2 = c\|u\|^4 = c,$$

og da den ikke negative kontinuerte funktion $x \mapsto |(T(x)u, u)|^2$ er positiv i $x = e$ er $c > 0$. Lad $(e_i)_{i=1}^n$ være et vilkårlig ortonormalsystem i H , vi ønsker at vise, at n ikke kan være vilkårlig stor. Sæt $u = e_k$ med $k \in \{1, \dots, n\}$ og $v = e_1$ i (9.1), herved fås

$$\int_G |(T(x)e_k, e_1)|^2 d\mu(x) = \alpha(e_k) \|e_1\|^2 = c \|e_k\|^2 = c, \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

Hermed haves:

$$nc = \sum_{k=1}^n \int_G |(T(x)e_k, e_1)|^2 d\mu(x) = \int_G \sum_{k=1}^n |(T(x)e_k, e_1)|^2 d\mu(x) \leq \int_G \|e_1\|^2 d\mu(x) = 1.$$

Her er Parsevals ligning benyttet i næstsidste trin. Den kan bruges, da $(T(x)e_k)_{k=1}^n$ er et ortonormalsystem i H på grund af, at $T(x)$ er unitær. Altså er $n \leq \frac{1}{c}$, hvorfor $\dim T \leq \frac{1}{c}$. $\square$

Sætning 9.4. *Enhver unitær repræsentation (T, H) af en kompakt gruppe G er en direkte sum af irreducible endeligdimensionale unitære delrepræsentationer.*

Bevis. Først vises, at

$$\begin{aligned} H_0 \neq \{0\} \text{ er et } T\text{-invariant underrum} &\implies \\ \exists A \neq \{0\}, \text{ hvor } A \text{ er et } T\text{-invariant underrum med } \dim A < \infty, A \subseteq H & \quad (\alpha) \\ \text{og irreducibel delrepræsentationen } T_A. & \end{aligned}$$

For hvis $H_0 \neq \{0\}$ er et T -invariant underrum, kan vi betragte delrepræsentation T_{H_0} (som også er unitær). Lad $u \in H_0 \setminus \{0\}$ og lad $K(u)$ være Weyl-operatoren hørende til T_{H_0} . Som i beviset for sætning 9.3 er

$$(K(u)v, v) = c \|u\|^2 \|v\|^2 \neq 0,$$

hvis $(u, v) \neq 0$ for $v \in H_0$, hvorfor $\ker K(u) \neq H_0$. Så da $K(u)$ er en selvadjungeret Hilbert-Schmidt operator findes en egenverdi $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ifølge [2AN], med tilhørende egenrum E_λ . Da $K(u)$ specielt er en kompakt operator [3AN] er $\dim E_\lambda < \infty$.

E_λ er T_{H_0} -invariant ifølge lemma 9.2(iii) og så gælder, at for $v \in E_\lambda \subseteq H_0 \subseteq H$ er $T(g)v = T_{H_0}(g)v \in E_\lambda$. Så E_λ er T -invariant. Da $\dim E_\lambda < \infty$ er E_λ et afsluttet underrum, og derfor kan vi betragte T_{E_λ} , som ifølge korollar 8.6 er fuldstændig reducibel. Det vil sige

$$T_{E_\lambda} = \oplus_{i=1}^n T_{E_\lambda^{(i)}},$$

hvor $T_{E_\lambda^{(i)}}$ er en irreducibel delrepræsentation af T_{E_λ} og dermed af T . Altså haves α med f.eks. $A = E_\lambda^{(1)}$.

Lad M være det mindste underrum af H , der indeholder alle parvis ortogonale endeligdimensionale T -invariante underrum E_i så T_{E_i} er irreducibel.

Så er M et ikke-trivielt ($M \neq \{0\}$) T -invariant underrum og M kan skrives $M = \oplus_{i \in I} E_i$, hvor $\dim E_i < \infty$, E_i er T -invariant og T_{E_i} er irreducibel.

Faktisk er $M = H$, thi ellers er $M^\perp \neq \{0\}$ et T -invariant underrum (T er unitær) og så giver (α) modstrid med definitionen af M . Hermed haves $T = \oplus_{i \in I} T_{E_i}$, hvor $\dim T_{E_i} < \infty$ og T_{E_i} er irreducible unitære delrepræsentationer af T . $\square$

10 Referencer

- [1LA] Messer, R.: Linear Algebra Gateway to Mathematics, HarperCollins College Publishers, 1993
- [2AN] Duurhus, B.: Matematik 2AN, Matematisk Institut, 1995
- [3GT] Berg, C.: Generel topologi, Matematisk Institut, 1996
- [3AN] Rudin, W.: Functional Analysis, McGraw-Hill Inc., 1991 Samt ugesedler som markeres U*.*.
- [Cohn] Cohn, D. L.: Measure Theory, Birkhäuser Boston, 1980
- [Barut] Barut, A.O., Raczka, R.: Theory of Group Representations and applications, Polish Scientific Publishers, 1977
- [Munroe] Munroe, M.E.: Measure and Integration, Addison-Wesley, 1971
- [Gaal] Gaal, S.A.: Linear Analysis and Representation Theory Springer, Berlin